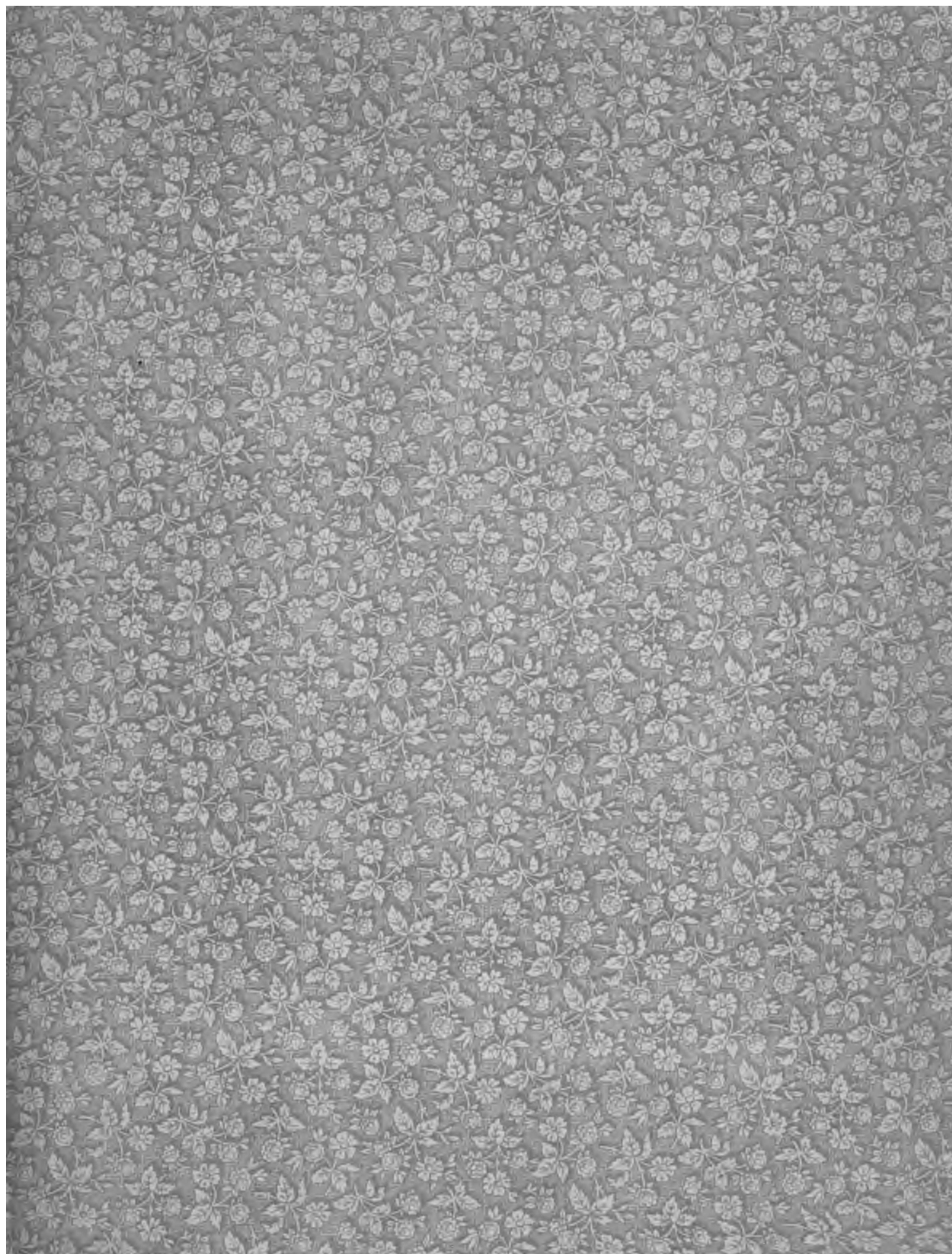

Stanford University Libraries
3 6105 000 820 469



ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

10

MIT INHALTSVERZEICHNISS

DER BÄNDE 1—10

AVEC LA TABLE DES MATIÈRES

DES TOMES 1—10



STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

ACTA MATHEMATICA, 10. 1887.

INHALT. — TABLE DES MATIÈRES.



ERRATUM.

Page 56, ligne 13 au lieu de: $m(m-1)[E(x)]^2$ lire: $\frac{m(m-1)}{2}[E(x)]^2$.

VERBESSERUNGEN.

Seite 19, Zeile 13 und 19 statt $\sum_{q+1}^{\nu}$ lies: $\sum_{\nu+1}^{q}$.

Seite 78, Zeile 5 statt $\sum(-1)^h . x^k . (x+1)^{h-k}$ lies: $\sum q_h(-1)^h . x^k . (x+1)^{h-k}$.

Seite 84, Fussnote, Zeile 3 statt $1 + a - a^4$ lies: $1 + a + a^4$.

ÜBER SUMMEN VON GRÖSSTEN GANZEN

VON

JACOB HACKS

in BONN.

Stellt man sich die Aufgabe, mit zwei ganzen Zahlen a und b die Division mit zugehöriger Restbestimmung auszuführen, so tritt sofort der Begriff der grössten in einer Zahl enthaltenen ganzen Zahl auf. Der Quotient mit Vernachlässigung des Restes, ist die grösste in der Zahl $\frac{a}{b}$ enthaltene ganze Zahl. Diese Operation, zu deren Bezeichnung man ein besonderes Zeichen eingeführt hat, findet in den verschiedensten Zweigen der Zahlentheorie vielfache Anwendung. Es sind insbesondere *Summen* von grössten Ganzen, welche in der Zahlenlehre von grosser Wichtigkeit sind. Man denke nur an die Ausdrücke für die Summen von Divisoren sowie an den Algorithmus im dritten GAUSS'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

Betrachtet man nun diese Summen von grössten Ganzen, so fällt ein characteristischer Unterschied ins Auge. Gewisse Summen von grössten Ganzen, und zwar namentlich diejenigen, welche in der Lehre von der Teilbarkeit der Zahlen auftreten, sind so beschaffen, dass die unter dem Zeichen befindliche Function mit wachsendem Argument fortwährend abnimmt, während andere, z. B. die in der Theorie der quadratischen Reste auftretenden Summen von grössten Ganzen die Eigenschaft haben, dass die unter dem Zeichen befindliche Function mit wachsendem Argument fortwährend zunimmt. Diese Unterscheidung ist für specielle Fälle schon von ZELLER gemacht worden. ZELLER untersucht nämlich in der Abhandlung *Über Summen von grössten Ganzen bei arithmetischen Reihen* (Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1879, p. 243)

zunächst Summen der zweiten Art und sagt dann, indem er zu der Untersuchung von Summen der ersten Art übergeht: »Diese Reihen haben mit den oben besprochenen das gemein, dass es sich dabei um eine Summe von grössten Ganzen handelt, wobei der Fortschritt zwischen den einzelnen Gliedern durch eine arithmetische Reihe bestimmt wird; aber während dort die Bruch*zähler* und darum auch die Brüche selbst eine arithmetische Progression bilden, so ist nun das letztere bei den Bruch*nennern* der Fall ohne Veränderung des Zählers und die Einzelbrüche sind reciproke Werte einer arithmetischen Progression oder mit anderen Worten — und hierin scheint gerade die Eigentümlichkeit dieser Art von Reihen zu bestehen — die Brüche, deren grösste Ganze zu summieren sind, bilden nicht eine arithmetische, sondern eine harmonische Reihe.» Die beiden Arten von Reihen unterscheiden sich eben dadurch, dass die Glieder der einen Art mit wachsender Stellenzahl zunehmen, während die der andern Art das entgegengesetzte Verhalten zeigen. Dass der hervorgehobene Unterschied nicht bloss äusserlicher Natur ist, sondern in der That das Wesen der Sache trifft, wird sich im Verlaufe der vorliegenden Arbeit ergeben. Demgemäss teilen wir dieselbe in zwei Abschnitte, und stellen an die Spitze eines jeden Abschnitts einen allgemeinen Satz, von denen der erste von LEJEUNE-DIRICHLET herrührt, während der zweite nach Analogie des DIRICHLET'schen Satzes gebildet ist.

Wir folgen der von GAUSS (*Theorematis arithmetici demonstratio nova*, GAUSS' Werke, Bd. 2, p. 3) eingeführten Bezeichnungsweise, nach der $[x]$ die unmittelbar unter x liegende ganze Zahl darstellt. Für den Fall, dass x eine ganze Zahl ist, definieren wir $[x] = x$. Die französischen Mathematiker gebrauchen statt der eckigen Klammern das Zeichen $E(x)$ (LEGENDRE, *Théorie des nombres*, p. 10: »l'entier le plus grand contenu dans la fraction x»).

I.

Über Summen von grössten Ganzen von Functionswerten, bei denen die Function mit wachsendem Argument fortwährend abnimmt.

§ 1.

Es sei $y = f(x)$ eine Function, welche immerfort abnimmt, während x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst. Dann hat die durch Umkehrung aus $y = f(x)$ entstehende Function $x = F(y)$ offenbar die Eigenschaft, gleichfalls immer abzunehmen, während y von $y = f(p)$ bis $y = f(\mu)$ wächst. Sind nun μ und p ganze Zahlen und setzt man zur Abkürzung $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$, so ist in der Reihe

$$\nu = [f(\mu)],\ [f(\mu + 1)],\ \ldots,\ [f(s)],\ \ldots,\ [f(p)] = q$$

jedes Glied grösser oder wenigstens nicht kleiner als das folgende. Nun entsteht die Frage: Welche Glieder der Reihe sind einer gegebenen zwischen ν und q liegenden ganzen Zahl t gleich? Es sei s der Zeiger desjenigen Gliedes, welches $\geqq t$ ist, während das folgende $< t$ ist. Dann gelten die Ungleichheiten

$$[f(s)] \geqq t, \qquad [f(s + 1)] < t,$$

oder

$$f(s) \geqq t, \qquad f(s + 1) < t.$$

Hieraus folgt kraft der über die Function $f(x)$ gemachten Voraussetzung

$$s \leqq F(t), \qquad s + 1 > F(t),$$

oder

$$s = [F(t)].$$

Ebenso findet man, dass der Wert $t + 1$ noch demjenigen Gliede zukommt, dessen Zeiger $s' = [F(t + 1)]$, dem folgenden aber nicht mehr, und es

ergibt sich, dass die Glieder, denen der Wert t zukommt, der doppelten Bedingung genügen müssen

$$s > [F(t + 1)], \qquad s \leqq [F(t)].$$

Für $t = \nu$ erhält die erste Bedingung die Gestalt $s \geqq \mu$, für $t = q$ lautet die zweite Bedingung $s \leqq p$.

In die Sprache der Geometrie übersetzt heisst dies: Wenn eine Curve $y = f(x)$ auf einer gewissen Strecke in Bezug auf die positive x-Axe fortwährend nach unten geneigt ist, so ist sie auch auf derselben Strecke in Bezug auf die positive Seite der y-Axe fortwährend nach unten geneigt. Zieht man durch die Punkte $x = \mu, \mu + 1, \ldots, p - 1, p$ Parallelen zur y-Axe, so wird die Anzahl der auf den von der Abscissenaxe und der Curve begrenzten Stücken dieser Parallelen liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten (Gitterpunkte) um so kleiner, je weiter sich die Parallelen von der y-Axe entfernen; wenigstens ist es unmöglich, dass eine Parallele, welche der Ordinatenaxe näher liegt, als eine andere, weniger Gitterpunkte enthält, als diese. Etwaige auf der Curve selbst liegende Punkte mit ganzzahligen Coordinaten sind natürlich zu den Gitterpunkten mitzurechnen. Die einzelnen Glieder der Reihe

$$[f(\mu)], \ [f(\mu + 1)], \ \ldots, \ [f(s)], \ \ldots, \ [f(p)]$$

werden offenbar dargestellt durch die Anzahl der auf den entsprechenden Parallelen liegenden Gitterpunkte. Ein gegebener Wert t kommt denjenigen Gliedern zu, deren Zeiger s auf der Abscissenaxe zwischen den Durchschnittspunkten derselben mit den Geraden $x = F(t)$ und $x = F(t + 1)$ liegen. Sollte $F(t)$ einen ganzzahligen Wert besitzen, so ist derselbe mitzurechnen, während ein ganzzahliger Wert für $F(t + 1)$ auszuschliessen ist.

In dieser geometrischen Deutung leuchtet die Wahrheit der bis jetzt aufgestellten Behauptungen unmittelbar ein.

Betrachtet man jetzt die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\, \varphi(s),$$

wo $\varphi(s)$ eine ganz beliebige Function ist, so sieht man, dass derjenige

Teil der Summe, in welchem $[f(s)]$ einen und denselben Wert t hat, wenn $g < t < \nu$ ist, den Ausdruck hat

$$t\{\Psi[F(t)] - \Psi[F(t+1)]\},$$

wo $\Psi(s) = \sum_1^s \varphi(s)$ ist. Die Partialsummen, welche den Werten $t = \nu$ und $t = q$ entsprechen, haben resp. die Werte

$$\nu\{\Psi[F(\nu)] - \Psi(\mu)\}$$

und

$$q\{\Psi(p) - \Psi[F(q+1)]\}.$$

Bei der Addition aller dieser Partialsummen erscheint abgesehen von den beiden Gliedern $-\nu\Psi(\mu)$ und $q\Psi(p)$ jedes Glied $\Psi[F(s)]$ mit der positiven Einheit multipliziert; es ergibt sich also die Gleichung

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi[F(s)].$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varphi(s) = 1$, so wird $\Psi(s) = s$, und es kommt

$$(2) \qquad \sum_{\mu+1}^{p} [f(s)] = qp - \nu\mu + \sum_{q+1}^{\nu} [F(s)].$$

Addiert man in (1) und (2) auf beiden Seiten resp. die Ausdrücke

$$\sum_1^{\mu} [f(s)]\varphi(s) \quad \text{und} \quad \sum_1^{\mu} [f(s)],$$

so ergeben sich die weiteren Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_1^{p} [f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_1^{\mu} [f(s)]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi[F(s)];$$

$$(4) \qquad \sum_1^{p} [f(s)] = qp - \nu\mu + \sum_1^{\mu} [f(s)] + \sum_{q+1}^{\nu} [F(s)].$$

Konstruiert man die Curve $y = f(x)$ und zieht in den Entfernungen μ und p Parallelen zur y-Axe, in den Entfernungen $f(p)$ und $f(\mu)$ Parallelen zur x-Axe, so genügt der Anblick der Figur, um uns von der Richtigkeit der Gleichungen (2) und (4) zu überzeugen.

Wir haben diesen von DIRICHLET in der Abhandlung *Über ein die Division betreffendes Problem* (CRELLE's Journal Bd. 47, p. 151) bewiesenen Satz mit seinem Beweise hier reproduziert, weil derselbe für das folgende von so grosser Wichtigkeit ist.

§ 2.

Bezeichnet $f(m)$ die Anzahl, $g(m)$ die Summe der Divisoren der Zahl m, und setzt man

$$F(m) = f(1) + f(2) + \dots + f(m),$$
$$G(m) = g(1) + g(2) + \dots + g(m),$$

so hat man die bekannten Gleichungen

(1)
$$F(m) = \sum_{s=1}^{s=m} \left[\frac{m}{s}\right],$$

(2)
$$G(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\left[\frac{m}{s}\right].$$

Ist m eine ungerade Zahl und

$$\mathfrak{F}(m) = f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(m),$$
$$\mathfrak{G}(m) = g(1) + g(3) + g(5) + \dots + g(m),$$

so ist[1]

$$\mathfrak{F}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\frac{m+2s-1}{2s-1}\right],$$

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\frac{m+2s-1}{2s-1}\right].$$

Man bezeichne mit $k(m)$ die Summe aus den ungeraden und den

[1] Cf. Acta Mathematica Bd. 9, p. 178, wo die Zeichen $F(m)$ und $G(m)$ an folgenden Stellen in $\mathfrak{F}(m)$ und $\mathfrak{G}(m)$ umzuändern sind: p. 178, Z. 5, 11, 14, 15, 18; p. 179, Z. 16; p. 180, Z. 17, 22, 24.

halben geraden Divisoren der Zahl m, mit $l(m)$ die Differenz aus den geraden und ungeraden Divisoren der Zahl m, und setze

$$K(m) = k(1) + k(2) + \dots + k(m),$$
$$L(m) = l(1) + l(2) + \dots + l(m).$$

Dann ist

$$K(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s\left[\frac{m}{s}\right] - \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s\left[\frac{m}{2s}\right],$$

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m} (-1)^s s\left[\frac{m}{s}\right].$$

Bevor wir dazu übergehen, auf die eben besprochenen Functionen die allgemeinen Transformationsgleichungen des § 1 anzuwenden, wollen wir die Darstellungen des § 1 verallgemeinern.

Bedeutet $f_2(m)$ die Anzahl, $g_2(m)$ die Summe der quadratischen Teiler von m und ist

$$F_2(m) = f_2(1) + f_2(2) + \dots + f_2(m),$$
$$G_2(m) = g_2(1) + g_2(2) + \dots + g_2(m),$$

so ist

$$F_2(m) = \sum_{s=1}^{s=[\sqrt{m}]} \left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$G_2(m) = \sum_{s=1}^{s=[\sqrt{m}]} s^2\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

und ist allgemein $F_a(m)$ die Anzahl, $G_a(m)$ die Summe sämtlicher Divisoren von der Form n^a aller Zahlen von 1 bis m, so gelten die Gleichungen

(3) $$F_a(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[a]{m}\right]} \left[\frac{m}{s^a}\right],$$

(4) $$G_a(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[a]{m}\right]} s^a\left[\frac{m}{s^a}\right];$$

ein zweiter Ausdruck für $F_a(m)$ ist der folgende

(5) $$F_a(m) = \sum_{s=1}^{s=m} \left[\frac{m^{\frac{1}{a}}}{s^{\frac{1}{a}}}\right].$$

Beide Darstellungen sind nur für $\alpha = 1$ identisch.

Die Gleichungen (3), (4) und (5) dieses sowie (1) des folgenden Paragraphen finden sich im 2. Bande der Acta Mathematica (*Sur quelques points de la théorie des nombres,* par R. LIPSCHITZ, p. 301 sqq.).

§ 3.

Wendet man auf den Ausdruck (3) die Gleichung (4) des § 1 an, so ergibt sich

(1) $$F_a(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s^a}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m^{\frac{1}{a}}}{s^{\frac{1}{a}}}\right],$$

wo μ eine beliebige zwischen 1 und $\left[m^{\frac{1}{a}}\right]$ liegende ganze Zahl und $\nu = \left[\frac{m}{\mu^a}\right]$ ist.

Es dürfte erwähnenswert sein, dass für $\mu = 1$ die Formel (1) in (5) des vorigen Paragraphen übergeht, indem für $\mu = 1$, $\nu = m$ und $\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s^a}\right] = m$ wird. Umgekehrt kann man natürlich auch mit Hülfe der Transformationsgleichung von (5) zu (1) gelangen.

Setzt man in (1) $\mu = \left[m^{\frac{1}{1+a}}\right]$, so erhält man, wie LIPSCHITZ an der erwähnten Stelle nachgewiesen hat, die Gleichung

(2) $$F_a(m) = -\mu^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s^a}\right] + \sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m^{\frac{1}{a}}}{s^{\frac{1}{a}}}\right].$$

Die Formeln (1) und (2) nehmen für $\alpha = 1$ resp. die Gestalt an

$$(3) \qquad F(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m}{s}\right],$$

$$(4) \qquad F(m) = -\mu^2 + 2\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right].$$

In der letzten Gleichung ist $\mu = [\sqrt{m}]$.

Die Gleichung (3) hat zuerst DIRICHLET gefunden (v. die Abhandlung *Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* Abhdlg. der Berl. Akad. 1849); die Gleichung (4) findet sich in einer schon genannten Abhandlung von ZELLER und im 2. Bande der Acta Mathematica (in der Note von CH. HERMITE p. 299).

Alle Formeln dieses Paragraphen lassen sich auch geometrisch beweisen. Der Kürze wegen möge der geometrische Beweis für die Gleichungen (3) und (4) genügen.

$y = \frac{m}{x}$ ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, welche die x- und y-Axe zu Asymptoten hat. Die Anzahl der in dem von den Asymptoten und der Hyperbel eingeschlossenen Flächenstücke liegenden Gitterpunkte ist augenscheinlich gleich $F(m)$. Denn die Anzahl der Gitterpunkte, welche auf der durch den Punkt ($x = 1$, $y = 0$) zur y-Axe gezogenen Parallele liegen, ist gleich $\left[\frac{m}{1}\right]$, auf der durch den Punkt ($x = 2$, $y = 0$) gehenden Parallele zur y-Axe liegen $\left[\frac{m}{2}\right]$ Gitterpunkte u. s. w., kurz, die Anzahl der Gitterpunkte ist $\left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{m}\right]$, und dies ist gerade der Ausdruck für die Function $F(m)$. Die Zahl

$$\sum_{s=1}^{s=\mu}\left[\frac{m}{s}\right]$$

wird dargestellt durch die Anzahl der Gitterpunkte, welche von der Abscissenaxe, den Ordinaten $x = 0$ und $x = \mu$ und der Hyperbel eingeschlos-

sen sind, wobei die auf der Geraden $x=\mu$ liegenden Punkte mit ganzzahligen Coordinaten natürlich mitzurechnen sind. Die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left[\frac{m}{s}\right]$$

ist gleich der Anzahl der von der Ordinatenaxe, den Abscissen $y=0$ und $y=\nu$ und der Hyperbel eingeschlossenen Gitterpunkte, wobei die auf der Geraden $y=\nu$ liegenden Gitterpunkte wiederum mitzurechnen sind. Es liegt dies daran, dass man der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel auch die Form $x=\frac{m}{y}$ geben kann, wodurch x und y ihre Rollen vertauschen. $\mu\nu$ ist die Anzahl derjenigen Gitterpunkte, welche in dem von den Axen, der Ordinate $x=\mu$ und der Abscisse $y=\nu$ gebildeten Rechteck liegen, und diese Anzahl ist, wie man unmittelbar sieht, von der Anzahl der schon betrachteten Gitterpunkte abzuziehen, um jeden Gitterpunkt einmal und nur einmal zu erhalten. Dies ist aber der Inhalt der zu beweisenden Gleichung (3).

Um die Gleichung (4) geometrisch zu beweisen, ziehen wir die Geraden $x=\mu$ und $y=\mu$, deren Durchschnittspunkt innerhalb des von den Axen und der Curve begrenzten Flächenstücks liegen muss. Auf der Verbindungslinie des zuletzt genannten Punktes mit dem Coordinatenanfangspunkte liegen μ und nur μ Gitterpunkte, weil der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der Hyperbel die Coordinaten $x=\sqrt{m}$, $y=\sqrt{m}$ hat. Nachdem dies festgestellt ist, verhelfen ähnliche Betrachtungen wie die oben angestellten leicht zu dem gewünschten Beweise.

Will man nur einen Teil der Summe transformieren, so dient dazu die von DIRICHLET (CRELLE's Journal Bd. 47 p. 153) aufgestellte Gleichung

$$(5) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{m}{s}\right]=pq-\mu\nu+\sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{m}{s}\right],$$

welche man aus (2), § 1 erhält, indem man $f(s)=\frac{m}{s}$ setzt.

Die Gleichung (5) ist gleichfalls einer sehr anschaulichen geometrischen Deutung fähig.

§ 4.

Es möge jetzt der Ausdruck

$$G_\alpha(m) = \sum_{s=1}^{s=\left[\sqrt[\alpha]{m}\right]} s^\alpha \left[\frac{m}{s^\alpha}\right]$$

durch Anwendung der Gleichung (1) des § 1 transformiert werden. Zunächst ist klar, dass man die Summation bis $s = m$ ausdehnen darf, ohne den Wert der Summe zu ändern. Setzt man in (1), § 1

$$f(s) = \frac{m}{s^\alpha}, \qquad \varphi(s) = s^\alpha,$$

$$\mu = 1, \qquad p = m,$$

so wird $\nu = m$ und wenn $\alpha > 1$ ist, $q = 0$. Wir machen die Voraussetzung, dass α die Einheit übertrifft; dann ergibt sich

$$\sum_{s=2}^{s=m} s^\alpha \left[\frac{m}{s^\alpha}\right] = -m + \sum_{s=1}^{s=m} \psi\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right],$$

$$= -m + \sum_1^m \sum_1^{\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right]} s^\alpha,$$

oder

$$\begin{aligned} G_\alpha(m) = & \sum_1^m \sum_1^{\left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{s}}\right]} s^\alpha \\ = & \quad 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{1}}\right]^\alpha \\ & + 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{2}}\right]^\alpha \\ & + \dots\dots \\ & + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{m}{m}}\right]^\alpha. \end{aligned}$$

Beispiel $m = 7$, $\alpha = 2$.

$$\sum_{s=1}^{s=7} s^2 \left[\frac{7}{s^2}\right] = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 11.$$

$$\sum_{s=1}^{s=7} \sum_{1}^{\left[\sqrt{\frac{7}{s}}\right]} s^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 11.$$

Bevor wir die Umformung für den Fall $\alpha = 1$ ausführen, wollen wir die Transformationsgleichungen für den Fall hinschreiben, dass die Function $f(s)$ die Gestalt $\frac{m}{s}$ hat. Es ergeben sich die Relationen

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\mu+1}^{p} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right],$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{1}^{p} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{1}^{\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right];$$

für $p = m$ wird $q = 1$ und $q\Psi(p) = \Psi(m)$, also

$$\text{(3)} \qquad \sum_{1}^{m} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = -\nu\Psi(\mu) + \sum_{1}^{\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) + \sum_{1}^{\nu} \Psi\left[\frac{m}{s}\right].$$

Setzt man in (3) $\mu = 1$, so wird $\nu = m$, die beiden ersten Glieder der rechten Seite heben sich auf, und es kommt

$$\text{(4)} \qquad \sum_{1}^{m} \left[\frac{m}{s}\right] \varphi(s) = \sum_{1}^{m} \Psi\left[\frac{m}{s}\right].$$

Diese vier Formeln sind der Abhandlung Dirichlets *Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie* entnommen.

Wenn man in (4) $\varphi(s) = s$ setzt, so ergibt sich

$$\text{(5)} \qquad \sum_{1}^{m} s\left[\frac{m}{s}\right] = \sum_{1}^{m} \sum_{1}^{\left[\frac{m}{s}\right]} s = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}\left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\},$$

oder

$$G(m) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{\left[\frac{m}{2}\right]\left\{\left[\frac{m}{2}\right] + 1\right\}}{2} + \cdots + \frac{\left[\frac{m}{m}\right]\left\{\left[\frac{m}{m}\right] + 1\right\}}{2}.$$

Die oben aufgestellte Formel behält also ihre Gültigkeit auch für $\alpha = 1$.

Wir hatten die Gleichung

$$\mathfrak{F}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right].$$

Aus

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{m+2x-1}{2x-1}$$

folgt

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{m+2y-1}{2y-1},$$

und hierauf beruht die Umformung

$$\mathfrak{F}(m) = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{s=\mu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right],$$

wo μ eine beliebige zwischen 1 und $\frac{m+1}{2}$ liegende ganze Zahl und $\nu = \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2\mu-1}{2\mu-1}\right]$ ist.

Der Ausdruck

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} (2s-1) \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]$$

erhält durch Anwendung von (3), § 1 die Gestalt

$$\mathfrak{G}(m) = -\nu\mu^2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} (2s-1) \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=2}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2,$$

indem für $\varphi(s) = 2s-1$, $\Psi(s) = s^2$ wird. Vereinigt man das zweite Glied der rechten Seite mit dem letzten, so ergibt sich

$$\mathfrak{G}(m) = -\nu\mu^2 + \sum_{s=1}^{s=\mu} (2s-1) \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right] + \sum_{s=1}^{s=\nu} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2.$$

Für $\mu = 1$ wird $\nu = \frac{m+1}{2}$, die beiden ersten Glieder der rechten Seite zerstören sich, und man erhält die Gleichung

$$\mathfrak{G}(m) = \sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \left[\frac{1}{2}\,\frac{m+2s-1}{2s-1}\right]^2.$$

Beispiel $m = 13$.

$$\sum_{s=1}^{s=7} (2s-1)\left[\frac{1}{2}\,\frac{7+2s-1}{2s-1}\right] = 1\left[\frac{14}{2}\right] + 3\left[\frac{16}{6}\right] + 5\left[\frac{18}{10}\right] + 7\left[\frac{20}{14}\right] + 9\left[\frac{22}{18}\right]$$

$$+ 11\left[\frac{24}{22}\right] + 13\left[\frac{26}{26}\right] = 7 + 6 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 58.$$

$$\sum_{s=1}^{s=7} \left[\frac{1}{2}\,\frac{7+2s-1}{2s-1}\right]^2 = 7^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 58.$$

Es ist

$$K(m) = \sum_{s=1}^{s=m} s.\left[\frac{m}{s}\right] - \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s.\left[\frac{m}{2s}\right].$$

Nun ist nach (5)

$$\sum_{s=1}^{s=m} s.\left[\frac{m}{s}\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}\left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\},$$

ferner ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} s.\left[\frac{m}{2s}\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{m}{2s}\right]\left\{\left[\frac{m}{2s}\right] + 1\right\}.$$

Demnach ergibt sich die Darstellung

$$K(m) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}\left\{\left[\frac{m}{s}\right]^2 + \left[\frac{m}{s}\right]\right\} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left\{\left[\frac{m}{2s}\right]^2 + \left[\frac{m}{2s}\right]\right\},$$

der man auch folgende Gestalt geben kann

$$K(m) = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{m}{1}\right]^2 + \left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{3}\right]^2 + \left[\frac{m}{3}\right] + \left[\frac{m}{5}\right]^2 + \left[\frac{m}{5}\right] + \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m+1}{2}\right]}\left\{\left[\frac{m}{2s-1}\right]^2 + \left[\frac{m}{2s-1}\right]\right\}.$$

Beispiel $m = 10$.

$$\left[\frac{10}{1}\right] + \left[\frac{10}{2}\right] + 3\left[\frac{10}{3}\right] + 2\left[\frac{10}{4}\right] + 5\left[\frac{10}{5}\right] + 3\left[\frac{10}{6}\right] + 7\left[\frac{10}{7}\right] + 4\left[\frac{10}{8}\right]$$
$$+ 9\left[\frac{10}{9}\right] + 5\left[\frac{10}{10}\right] = 66.$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{10}{1}\right]^2 + \left[\frac{10}{1}\right] + \left[\frac{10}{3}\right]^2 + \left[\frac{10}{3}\right] + \left[\frac{10}{5}\right]^2 + \left[\frac{10}{5}\right] + \left[\frac{10}{7}\right]^2 + \left[\frac{10}{7}\right]\right.$$
$$\left. + \left[\frac{10}{9}\right]^2 + \left[\frac{10}{9}\right]\right\} = \frac{1}{2}.132 = 66.$$

Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s . s\left[\frac{m}{s}\right]$$

mit Hülfe der Gleichung (4) umformen, indem wir $\varphi(s) = (-1)^s . s$ setzen.

Es ergibt sich sofort

$$\sum_{s=1}^{s=m}(-1)^s . s\left[\frac{m}{s}\right] = \sum_{s=1}^{s=m}\sum_{1}^{\left[\frac{m}{s}\right]}(-1)^s . s.$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{s}\right]}(-1)^s . s = (-1)^{\left[\frac{m}{s}\right]}\left[\frac{\left[\frac{m}{s}\right]+1}{2}\right],$$

mithin

$$L(m) = \sum_{s=1}^{s=m}(-1)^{\left[\frac{m}{s}\right]}\left[\frac{\left[\frac{m}{s}\right]+1}{2}\right].$$

Beispiel $m = 7$.

$$L(7) = -\left[\frac{7}{1}\right] + 2\left[\frac{7}{2}\right] - 3\left[\frac{7}{3}\right] + 4\left[\frac{7}{4}\right] - 5\left[\frac{7}{5}\right] + 6\left[\frac{7}{6}\right] - 7\left[\frac{7}{7}\right] = -9.$$

Anderseits ist auch

$$-4 - 2 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -9.$$

II.

Über Summen von grössten Ganzen von Functionswerten, bei denen die Function mit wachsendem Argument fortwährend wächst.

§ 5.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, wie aus dem DIRICHLET'schen Satze eine Reihe von Folgerungen sich ergeben, indem derselbe sich auf die Summenfunctionen, die bei der Betrachtung der Teilbarkeit der Zahlen auftreten, ohne Mühe anwenden lässt. In ähnlicher Weise lassen sich der dritte GAUSS'che Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, verschiedene von ZELLER in den Nachrichten der Gött. Ges. d. W. vom Jahre 1879 veröffentlichte Sätze, ein allgemeiner Satz von SYLVESTER und eine Reihe anderer Folgerungen aus einem Satze ableiten, den wir jetzt beweisen wollen.

Eine Function $y = f(x)$ möge, während x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst, immerfort zunehmen. Dann wird die durch Umkehrung aus $y = f(x)$ entstehende Function $x = F(y)$ ebenfalls wachsen, wenn y von $y = f(\mu)$ bis $y = f(p)$ wächst. μ und p seien ganze Zahlen, ferner sei

$$[f(\mu)] = \nu, \qquad [f(p)] = q.$$

Wir bilden die Reihe

$$[f(\mu)], \qquad [f(\mu + 1)], \quad \ldots \quad [f(s)], \quad \ldots \quad [f(p)],$$

wo jedes Glied kleiner als das folgende oder demselben gleich ist. Wir

machen zunächst die Voraussetzung, dass keiner der in Betracht kommenden Werte $f(s)$ gleich einer ganzen Zahl ist, so dass immer $f(s) > [f(s)]$ ist mit Ausschluss der Gleichheit. Welche Glieder der obigen Reihe sind einer gegebenen zwischen ν und q liegenden ganzen Zahl t gleich? Zur Beantwortung dieser Frage suchen wir den völlig bestimmten Zeiger desjenigen Gliedes auf, dessen Wert unter t liegt, während der des folgenden über t liegt oder demselben gleich ist. Es ist also

$$[f(s)] < t, \qquad [f(s+1)] \geqq t,$$

oder

$$f(s) < t, \qquad f(s+1) > t.$$

Hieraus folgen vermöge der über die Function $y = f(x)$ gemachten Voraussetzung die Ungleichheiten

$$s < F(t), \qquad s + 1 > F(t),$$

oder, was dasselbe ist

$$s = [F(t)].$$

In derselben Weise ist der Zeiger des vom Anfange entferntesten Gliedes, dessen Wert unter $t+1$ liegt, gleich $[F(t+1)]$; es kommt also der Wert t denjenigen Gliedern zu, deren Zeiger der doppelten Bedingung genügen

$$[F(t+1)] \geqq s > [F(t)].$$

Wegen des gegebenen Anfangs und Endes der Reihe erhält diese Bestimmung für $t = \nu$ die Modifikation, dass an Stelle der zweiten Bedingung $s \geqq \mu$ tritt, während für $t = q$ an Stelle der ersten Bedingung $s \leqq p$ tritt.

Wir wollen nun die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s)$$

dadurch transformieren, dass wir zuerst alle Glieder vereinigen, in denen $[f(s)]$ einen und denselben Wert hat, und dann die so erhaltenen Partialsummen addieren. Die Summe der Glieder in denen $[f(s)]$ einen bestimmten zwischen ν und q liegenden Wert hat, erhält, wenn man

$$\sum_{1}^{s} \varphi(s) = \Psi(s)$$

setzt, den Ausdruck

$$t\{\Psi[F(t+1)] - \Psi[F(t)]\};$$

für $t = \nu$ und $t = q$ treten an Stelle dieses Ausdrucks bezw. die Werte

$$\nu\{\Psi[F(\nu+1)] - \Psi(\mu)\}$$

und

$$q\{\Psi(p) - \Psi[F(q)]\}.$$

Bei der Addition aller dieser Partialsummen erscheint abgesehen von den beiden Gliedern $-\nu\Psi(\mu)$ und $q\Psi(p)$ jedes Glied mit der negativen Einheit multipliziert; es ergibt sich also

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p) - \sum_{\nu+1}^{q}\Psi[F(s)]$$

oder

$$(1) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{\nu+1}^{q}\Psi[F(s)] = -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p).$$

Setzt man $\varphi(s) = 1$, so wird $\Psi(s) = s$ und es kommt

$$(2) \qquad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)] = -\mu\nu + pq.$$

Diese Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, dass keiner der betrachteten Werte $f(s)$ einen ganzzahligen Wert hat. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen und untersuchen in welcher Weise sich die Gleichungen (1) und (2) für den Fall ändern, dass unter den in Betracht kommenden Werten von $f(s)$ einige gleich einer ganzen Zahl sind. Ein ganzzahliger Wert von $f(\mu)$ vermag offenbar den Wert des Ausdruckes $\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s)$ nicht zu beeinflussen; es seien demgemäss $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\rho$ diejenigen zwischen $\mu+1$ und p mit Einschluss beider Grenzen liegenden ganzen Zahlen, für welche $f(s)$ gleich einer ganzen Zahl wird. Wiederholt man die Betrachtung, welche zu der Gleichung (1) geführt hat, so stellt sich heraus, dass die Werte $\varphi(s_1)$, $\varphi(s_2)$, $\varphi(s_3)$, $\ldots$, $\varphi(s_\rho)$ sämtlich

einmal zu wenig mitgerechnet sind, es ist demnach auf der rechten Seite von (1) das Aggregat

$$\varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \varphi(s_3) + \dots + \varphi(s_\rho)$$

zu addieren.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Eine Function $y = f(x)$ möge mit wachsendem x von $x = \mu$ bis $x = p$ fortwährend zunehmen, wo μ und p ganze Zahlen bedeuten. $x = F(y)$ sei die aus $y = f(x)$ durch Umkehrung entstehende Function, ferner sei $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$ und $\varphi(s)$ eine beliebige Function. Wenn alsdann $s_1, s_2, \dots, s_\rho$ diejenigen ganzzahligen zwischen $\mu + 1$ und p mit Einschluss beider Grenzen liegenden Argumente sind, für welche die Function $y = f(x)$ gleich einer ganzen Zahl wird, so ist

$$(3)\quad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{q+1}^{\nu}\Psi[F(s)]$$
$$= -\nu\Psi(\mu) + q\Psi(p) + \varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \dots + \varphi(s_\rho),$$

wo $\Psi(s) = \sum_{1}^{s}\varphi(s)$ ist.

Für $\varphi(s) = 1$ gestaltet sich dieses Resultat wesentlich einfacher. Ist ρ diejenige Zahl, welche angibt, wie viele unter den Functionswerten $f(\mu + 1), f(\mu + 2), \dots, f(p)$ ganze Zahlen sind, so ist

$$(4)\quad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{q+1}^{\nu}[F(s)] = -\mu\nu + pq + \rho.$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf folgende Art beweisen.

Die Function $y = f(x)$ sei zunächst nicht im Stande, für ganzzahlige Werte von x ganzzahlige Werte anzunehmen, die Zahl ρ sei also gleich Null, und die Gleichung

$$(5)\quad \sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)] = -\mu\nu + pq$$

werde für einen bestimmten Wert von p als richtig angenommen. Dann fügen wir der ersten Summe der linken Seite von (2) das Glied

$$[f(p + 1)] = q + l,$$

der zweiten Summe die Glieder $[F(q+1)]$, $[F(q+2)]$, ..., $[F(q+l)]$ zu. Hierdurch erhält die linke Seite die Gestalt

$$(6) \qquad \sum_{\mu+1}^{p+1}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q+l}[F(s)].$$

Nun folgt aus $[f(p)] = q$, $[f(p+1)] = q + l$ die Richtigkeit folgender Ungleichheiten

$$q + 1 > f(p) > q,$$
$$q + l + 1 > f(p+1) > q + l,$$

oder

$$f(p) = q + \theta,$$
$$f(p+1) = q + l + \theta_1,$$

wo θ und θ_1 positive echte Brüche bezeichnen. Hieraus folgt weiter

$$p = F(q+\theta),$$
$$p + 1 = F(q + l + \theta_1),$$

und hieraus ergeben sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass auch die Function $x = F(y)$ mit zunehmendem Argument beständig wächst, die Beziehungen

$$[F(q+1)] = p,$$
$$[F(q+2)] = p,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[F(q+l)] = p.$$

Es ist also

$$\sum_{s=q+1}^{s=q+l}[F(s)] = pl.$$

Demnach erhält der Ausdruck (6) den Wert

$$-\mu\nu + pq + q + l + pl = -\mu\nu + (p+1)(q+l),$$

also

$$\sum_{\mu+1}^{p+1}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q+l}[F(s)] = -\mu\nu + (p+1)(q+l).$$

Ist somit die Gleichung (5) für einen bestimmten Wert von p richtig, so ist sie auch für jeden über p liegenden ganzzahligen Wert richtig. Sie ist aber offenbar richtig für $p = \mu$, indem alsdann $q = \nu$ wird und in der Gleichung

$$(7)\qquad \sum_{\mu+1}^{\mu}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{\nu}[F(s)] = -\mu\nu + \mu\nu$$

die Summen der linken Seiten überhaupt keine Glieder enthalten, und die rechte Seite identisch verschwindet.

Lässt man die Möglichkeit offen, dass $f(s)$ für ganzzahlige Werte von s gleich einer ganzen Zahl werde, so wird das obige Verfahren nur in so weit alteriert, als für einen ganzzahligen Wert von $f(p+1)$ die Zahl $[F(q+l)]$ gleich $p+1$ wird. Es ist also für jeden ganzzahligen Wert von $f(s)$ rechts eine Einheit zu addieren. Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (7) sofort die Richtigkeit von (4).

Dieser Beweis ist einem Verfahren nachgebildet, welches Sylvester anwendet, um eine speciellere Gleichung zu beweisen, von welcher weiter unten (p. 27) die Rede sein wird.

Vielleicht verdient es erwähnt zu werden, dass auch die Gleichung (2) des § 1 eines ganz ähnlichen Beweises fähig ist.

§ 6.

Die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen lässt sich auf eine einfache Weise geometrisch beweisen. Man konstruiere die Curve $y = f(x)$. Dieselbe wird infolge der über die Function $y = f(x)$ gemachten Voraussetzung von $x = \mu$ bis $x = p$ fortwährend nach oben geneigt sein. Dann ziehe man in den Entfernungen μ und p Parallelen zur y-Axe und in den Entfernungen $f(\mu)$ und $f(p)$ Parallelen zur x-Axe. Die erstgenannten Parallelen bezeichne man resp. mit ST und PQ, die letztgenannten Parallelen resp. mit UT und RQ. Nun stellt offenbar das erste Glied der linken Seite der zu beweisenden Gleichung die Anzahl derjenigen Gitterpunkte dar, welche in dem Flächenstück $PQTS$ liegen, wobei die auf der Geraden PQ und der Curve QT liegenden Punkte mit ganzzahligen Coor-

dinaten mitzurechnen sind (mit Ausschluss des Punktes T, falls dieser ein Gitterpunkt sein sollte).

Das zweite Glied der linken Seite gibt in ganz entsprechender Weise die Anzahl derjenigen Gitterpunkte an, welche von dem Viereck $QRUT$ eingeschlossen werden, wobei etwaige auf den Linien QT und QR liegende Gitterpunkte wiederum mitzurechnen sind. Die in Bezug auf den Punkt T oben gemachte Bemerkung gilt auch hier. Hieraus ist ersichtlich, dass man die Anzahl pq der in dem Rechteck $OPQR$, jedoch mit Ausschluss der beiden Axen, enthaltenen Gitterpunkte erhält, indem man einerseits die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{q}[F(s)]$$

um die Anzahl ρ derjenigen Gitterpunkte vermindert, welche auf dem in Betracht kommenden Stücke der Curve $y = f(x)$ liegen, und anderseits die Anzahl $\mu\nu$ der in dem Rechteck $OSTU$ liegenden Gitterpunkte addiert. Dies ist aber der Inhalt des in Rede stehenden Satzes.

§ 7.

Nunmehr wollen wir von dem so eben auf analytischem und geometrischem Wege bewiesenen Satze einige Anwendungen machen. Um zunächst ein Beispiel zu wählen, in welchem die Function $y = f(x)$ transcendent ist, setzen wir

$$y = e^x.$$

Hieraus entsteht durch Umkehrung

$$x = \log y.$$

Setzt man dies in (4), § 5 ein und nimmt die Zahl $\mu = 0$, so wird $\nu = [e^0] = 1$. Da, wie Hermite in der Abhandlung *Sur la fonction exponentielle* nachgewiesen hat, die Basis e der natürlichen Logarithmen auf eine ganzzahlige Potenz s erhoben, niemals eine ganze Zahl werden kann (natürlich abgesehen von $s = 0$), oder, was dasselbe ist, da der natürliche Logarithmus einer ganzen Zahl s (mit Ausnahme von $s = 1$)

niemals gleich einer ganzen Zahl sein kann, so ist im vorliegenden Falle die Zahl $\rho = 0$. Da ferner $\log 1 = 0$, so ergibt die Anwendung von (4), § 5 die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=p} [e^s] + \sum_{s=1}^{s=q} [\log s] = pq,$$

wo p eine beliebige positive ganze Zahl und $q = [e^p]$ ist. Das Aggregat auf der linken Seite ist also stets gleich dem Produkt aus den Gliederanzahlen der beiden Summen.

Die wirkliche Ausführung der Rechnung bestätigt dieses Resultat. Für $p = 5$ z. B. wird $q = [e^5] = 148$, ferner ist

$$\sum_1^5 [e^s] = 231, \qquad \sum_1^{148} [\log s] = 509,$$

also

$$\sum_1^5 [e^s] + \sum_1^{148} [\log s] = 740 = 5 . 148.$$

Ein ähnlicher Satz gilt für jede beliebige Basis eines Logarithmensystems. Für die Basis 10 z. B. gilt die Gleichung

$$\sum_1^p 10^s + \sum_1^q [\log s] = p(q+1),$$

wo $q = 10^p$ ist. Die Zahl ρ hat hier den Wert p. So hat man z. B. für $p = 3$, $q = 1000$

$$\sum_1^3 10^s + \sum_1^{1000} [\log s] = 1110 + 1893 = 3003 = 3 . (1000 + 1).$$

Wir wenden uns jetzt zu solchen Summen von grössten Ganzen, bei denen $y = f(x)$ eine rationale ganze Function von x ist, und zwar beschränken wir die Untersuchung auf solche Functionen, bei denen die Variable x nur in einem einzigen Gliede vorkommt. Es sei demgemäss

$$y = \frac{ax^\alpha + d}{m},$$

wo a, α und m beliebige positive ganze Zahlen mit Ausschluss der Null,

und d zunächst eine positive unter m liegende ganze Zahl bedeuten möge. Die durch Umkehrung entstehende Function hat die Form

$$x = \sqrt[a]{\frac{my - d}{a}}.$$

Die Function $y = \frac{ax^a + d}{m}$ hat von dem Werte $x = 0$ an die Eigenschaft, mit wachsendem x stets zuzunehmen; es ist daher gestattet, bei Anwendung unseres Satzes die Zahl μ gleich Null zu nehmen. Dann wird $\nu = \left[\frac{d}{m}\right] = 0$, und es ergibt sich

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a + d}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] - \rho = pq.$$

Hier bedeutet p eine beliebige positive ganze Zahl; ferner ist

$$q = \left[\frac{ap^a + d}{m}\right]$$

und ρ die Anzahl derjenigen unter den Brüchen

$$\frac{a \,.\, 1^a + d}{m}, \quad \frac{a \,.\, 2^a + d}{m}, \quad \ldots \quad \frac{a \,.\, p^a + d}{m},$$

welche ganzzahlige Werte haben.

Es ist klar, dass die Zahl ρ auch gleich der Anzahl derjenigen unter den Wurzelwerten

$$\sqrt[a]{\frac{m \,.\, 1 - d}{a}}, \quad \sqrt[a]{\frac{m \,.\, 2 - d}{a}}, \quad \ldots \quad \sqrt[a]{\frac{m \,.\, q - d}{a}}$$

ist, welche ganze Zahlen sind. Statt nun die Zahl ρ auf der linken Seite von (1) zu subtrahieren, kann man auch unter dem Wurzelzeichen zum Zähler die negative Einheit hinzufügen. Denn für den Fall, dass $\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}$ keine ganze Zahl ist, ist $\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] = \left[\sqrt[a]{\frac{ms - d - 1}{a}}\right]$; ist aber $\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}$ eine ganze Zahl, so ist $\left[\sqrt[a]{\frac{ms - d}{a}}\right] - 1 = \left[\sqrt[a]{\frac{ms - d - 1}{a}}\right]$, und da der

Ausdruck $\sqrt[a]{\frac{ms-d}{a}}$ ρ mal zu einer ganzen Zahl wird, während s die Reihe der Werte $1, 2, \ldots, q$ durchläuft, so ergibt sich

$$\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d}{a}}\right]-\rho=\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right].$$

Somit erhält man die Gleichung

$$(2)\qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a+d}{m}\right]+\sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right]=pq.$$

Für $d \geqq m$ hat $\nu=\left[\frac{d}{m}\right]$ einen von Null verschiedenen Wert; es ist alsdann

$$(3)\qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as^a+d}{m}\right]+\sum_{\nu+1}^{q}\left[\sqrt[a]{\frac{ms-d-1}{a}}\right]=pq.$$

Diese Gleichung welche die Gleichung (2) als speciellen Fall enthält, gilt auch dann noch, wenn d negativ ist.

Für $a=1$ erhält die Gleichung (3) die Gestalt

$$(4)\qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^a+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{ms-d-1}\right]=pq.$$

Indem man den Zahlen α und d specielle Werte beilegt, kann man aus (3) und (4) eine Reihe von Sätzen ableiten, welche ZELLER in der schon mehrfach erwähnten Abhandlung veröffentlicht hat.

Es sei z. B. $\alpha=1$, so kommt

$$(5)\qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as+d}{m}\right]+\sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\frac{ms-d-1}{a}\right]=pq,$$

$$q=\left[\frac{ap+d}{m}\right].$$

Setzt man $a = 2$, so geht (4) in die folgende Gleichung über

$$(6) \qquad \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^2+d}{m}\right] + \sum_{s=\left[\frac{d}{m}\right]+1}^{s=q}\left[\sqrt{ms-d}-1\right] = pq,$$

$$q = \left[\frac{p^2+d}{m}\right].$$

Für $d = 0$ endlich nehmen (4), (5), (6) resp. die Gestalt an

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^a}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt[a]{ms}-1\right] = pq,$$

$$q = \left[\frac{p^a}{m}\right];$$

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{as}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=q}\left[\frac{ms-1}{a}\right] = pq,$$

$$q = \left[\frac{ap}{m}\right];$$

$$\sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=q}\left[\sqrt{ms}-1\right] = pq,$$

$$q = \left[\frac{p^2}{m}\right].$$

§ 8.

Bekanntlich beruht der dritte Gauss'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, welcher im Jahre 1808 in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis veröffentlicht worden ist (Gauss' Werke Bd. II. p. 3 sqq.), auf dem Satze:

Wenn p und q positive ungerade relative Primzahlen sind, so ist

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{p}{q}s\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{q}{p}s\right] = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Diese Gleichung hat man seitdem auf verschiedene Arten bewiesen und verallgemeinert; aber alle mir bekannten Verallgemeinerungen sind nur specielle Fälle des in § 5 bewiesenen allgemeinen Satzes, wie im einzelnen nachgewiesen werden soll.

Gauss selbst leitet die Gleichung (1) aus folgendem Satze ab:

Ist x eine positive Grösse, welche so beschaffen ist, dass unter den Vielfachen derselben x, $2x$, ..., nx keine einzige ganze Zahl vorkommt, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=n}[sx] + \sum_{s=1}^{s=h}\left[\frac{s}{x}\right] = nh, \tag{2}$$

wo $h = [nx]$ ist.

Nimmt man in (4), § 5 die Function $f(s) = xs$, so hat die durch Umkehrung aus $f(s)$ entstehende Function die Gestalt $F(s) = \frac{s}{x}$; die Zahl ρ verschwindet infolge der Voraussetzung, und es folgt ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichung (2), wenn man $\mu = 0$ nimmt.

Aus (2) leitet nun Gauss die Gleichung (1) ab, indem er $x = \frac{p}{q}$ setzt und annimmt, dass p kleiner sei als q, was offenbar gestattet ist. Alsdann ist

$$\left[\frac{\frac{q-1}{2}p}{q}\right] = \left[\frac{qp-p}{2q}\right] = \left[\frac{p-\frac{p}{q}}{2}\right] = \frac{p-1}{2},$$

und hieraus ergibt sich sofort die Richtigkeit von (1).

Zeller hat die Gleichung (1) in der Weise erweitert, dass er an Stelle der Ausdrücke

$$\frac{1 \cdot p}{q}, \quad \frac{2 \cdot p}{q}, \quad \frac{3 \cdot p}{q}, \quad \ldots,$$

welche eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, arithmetische Reihen höherer Ordnung treten liess. Die betreffenden Sätze sind im vorigen Paragraphen besprochen und aus unserem allgemeinen Satze abgeleitet worden.

Sylvester leitet in dem Aufsatze *Sur la fonction* $E(x)$ (Comptes Rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, tome L, p. 732) das Reciprocitätsgesetz aus folgendem Satze ab:

Wenn p und q zwei beliebige positive Grössen sind und λ eine positive Grösse bezeichnet, welche kleiner ist, als der kleinste Wert a, welcher zur selben Zeit ap und aq zu ganzen Zahlen macht, so besteht die Gleichung

$$(3)\qquad \sum_{s=0}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right]+\sum_{s=0}^{s=[\lambda p]}\left[\frac{sq}{p}\right]=[\lambda p]\cdot[\lambda q].$$

Den Beweis dieses Satzes führt SYLVESTER in folgender Weise. Die Gleichung (3) sei richtig für alle Werte von λ, welche unter einer gewissen Grösse liegen. Von dieser Grösse aus lassen wir λ allmählich stetig wachsen. Kein einziges Glied unserer Gleichung wird seinen Wert ändern, bis λp oder λq ganze Zahlen werden, was nach Voraussetzung nicht gleichzeitig geschehen kann. Gesetzt nun, λp werde zuerst eine ganze Zahl. Dann nimmt die zweite Summe der linken Seite zu um das Glied $\left[\lambda p\frac{q}{p}\right]=[\lambda q]$, während die erste ungeändert bleibt. Auf der rechten Seite bleibt $[\lambda q]$ ungeändert, während $[\lambda p]$ um eine Einheit zunimmt, es wächst also auch die rechte Seite der Gleichung um $[\lambda q]$. Unser Satz besteht also für den ersten Wert von λ, welcher eine Veränderung in unserer Gleichung hervorbringt, also auch für den 2ten, 3ten Wert, u. s. w., und da die Gleichung für $\lambda = 0$ richtig ist, so gilt sie allgemein für jeden unter der angegebenen Grenze liegenden Wert von λ.

Lässt man die der Grösse λ auferlegte Beschränkung fallen, so nimmt jedesmal, wenn λp und λq gleichzeitig ganze Zahlen werden, der Ausdruck

$$\sum_{s=0}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right]+\sum_{s=0}^{s=[\lambda p]}\left[\frac{sq}{p}\right]$$

um die Summe $[\lambda p]+[\lambda q]=\lambda p+\lambda q$ zu, während $[\lambda p].[\lambda q]$ nur den Zuwachs

$$\lambda p.\lambda q-(\lambda p-1)(\lambda q-1)=\lambda p+\lambda q-1$$

erhält. Folglich hat man für jeden beliebigen Wert von λ die Gleichung

$$(4)\qquad \sum_{s=0}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right]+\sum_{s=0}^{s=[\lambda p]}\left[\frac{sq}{p}\right]=[\lambda p].[\lambda q]+L,$$

wo L diejenige Zahl bedeutet, welche angibt, wie oft px und qx gleichzeitig ganze Zahlen werden, während x von o bis λ wächst.

Die Gleichung (3) ergibt sich, wie STERN bemerkt hat (v. die Abhandlung *Über einige Eigenschaften der Function* $E(x)$, CRELLE's Journal, Bd. 59, p. 146) sofort aus der GAUSS'schen Gleichung (2), wenn man in dieser $x = \frac{p}{q}$ und $n = [\lambda q]$ setzt. Denn wir dürfen annehmen, dass eine der beiden Grössen λp und λq eine ganze Zahl sei. Sollte dies nämlich nicht von vornherein der Fall sein, so lassen wir λ abnehmen, bis eine der beiden Grössen λp und λq eine ganze Zahl wird, und halten den Wert von λ fest, bei dem dies zuerst geschieht. Durch das beschriebene Verfahren hat keine einzige der in Betracht kommenden grössten ganzen Zahlen ihren Wert verändert. Es sei also λq eine ganze Zahl. Dann wird $\left[\frac{[\lambda q]p}{q}\right] = [\lambda p] = h$, und hiermit ist (3) aus (2) abgeleitet.

Sodann kann man die Gleichungen (3) und (4) auch unmittelbar aus (4), § 5 erhalten, indem man die Function $f(s) = \frac{p}{q}s$, die Zahl μ gleich Null und die dortige Zahl p gleich $[\lambda q]$ nimmt. Aus der zuletzt erwähnten Gleichung folgt sofort

$$\sum_{s=1}^{s=[\lambda q]}\left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right]}\left[\frac{sq}{p}\right] = [\lambda q]\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] + \rho,$$

wo die Zahl ρ angibt, wie viele von den vorkommenden Brüchen $\frac{sp}{q}$ ganzzahlige Werte haben.

Nun könnten wir wieder den eben eingeschlagenen Weg befolgen, um zu zeigen, dass man unter den beiden Grössen p und q stets die eine, q, so auswählen kann, dass $\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = [\lambda p]$ wird; wir ziehen es aber vor, diesen Beweis auf einem von STERN (a. a. O.) angegebenen Wege zu führen. Wir setzen

$$\lambda q = [\lambda q] + e, \qquad \lambda p = [\lambda p] + f;$$

dann ist

$$\frac{p}{q}[\lambda q] = \lambda p - \frac{ep}{q} = [\lambda p] + \frac{fq - ep}{q}.$$

Ist nun $fq = ep$, so folgt sofort

$$\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = [\lambda p],$$

andernfalls kann man für q denjenigen der beiden Werte p und q nehmen, für welchen $fq > ep$ ist, so dass $0 < \frac{fq - ep}{q} < 1$ wird. Es ist also wiederum

$$\left[[\lambda q]\frac{p}{q}\right] = \left[[\lambda p] + \frac{fq - ep}{q}\right] = [\lambda p].$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass die Zahl ρ mit der obigen Zahl L übereinstimmt. Es folgt dies daraus, dass jedesmal, wenn xp und xq gleichzeitig ganze Zahlen werden, auch $[xq]\frac{p}{q} = xp$ und $[xp]\frac{q}{p} = xq$ ganze Zahlen sein müssen.

Aus (3) zieht nun STERN eine Reihe von Folgerungen. Sind p und q relative Primzahlen und e und f resp. die kleinsten positiven Reste von p und q nach den Moduln m und n, also $\frac{p-e}{m}$ und $\frac{q-f}{n}$ ganze Zahlen, ist ferner k eine positive ganze Zahl von der Beschaffenheit, dass $ke < m$ und $kf < n$ ist, so besteht, wie sich leicht zeigen lässt, die Relation

(5) $$\sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-f)}{n}} \left[\frac{spn}{qm}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{sqm}{pn}\right] = \frac{k^2(q-f)(p-e)}{mn}.$$

Für $k = 1$ ist die Bedingung $ke < m$, $kf < n$ erfüllt; es ist demnach

(6) $$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-f}{n}} \left[\frac{spn}{qm}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-e}{m}} \left[\frac{sqm}{pn}\right] = \frac{(q-f)(p-e)}{mn}.$$

Für $m = n$ geht (5) über in

(7) $$\sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-f)}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{k^2(q-f)(p-e)}{m^2},$$

und für den Fall, dass $e = f = 1$ ist, kommt

(8)
$$\sum_{s=1}^{s=\frac{k(q-1)}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{k(p-1)}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{k^2(p-1)(q-1)}{m^2}.$$

Die Gleichung (8) ist zuerst von Sylvester (a. a. O.) aufgestellt worden; sie enthält als speciellen Fall folgenden Satz von Eisenstein (Crelle's Journal XXVII, p. 281):

Sind p und q relative Primzahlen und beide $\equiv 1 \pmod{m}$, so ist

(9)
$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{m}} \left[\frac{sp}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{m}} \left[\frac{sq}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{m^2};$$

hieraus ergibt sich für $m = 2$ die Gleichung (1).

Selbstverständlich lassen sich die Relationen (1) und (5) bis (9) auch unmittelbar aus dem in § 5 bewiesenen Satze herleiten. Die unter dem zweiten Summenzeichen befindliche Function ist jedesmal die Umkehrung der unter dem ersten Summenzeichen befindlichen Function, ferner steht auf der rechten Seite überall das Produkt aus den Gliederanzahlen der beiden Summen, und die Zahl ρ verschwindet infolge der gemachten Voraussetzungen mit Notwendigkeit. Da ausserdem für $\mu = 0$ überall auch $\nu = 0$ wird, so handelt es sich jedesmal nur um den Nachweis, dass man unter den völlig gleichberechtigten Zahlen p und q stets die eine, q, so auswählen kann, dass das letzte Glied der ersten Summe auf der linken Seite gleich der Anzahl der Glieder der zweiten Summe wird. So ist z. B. in (9), wenn man die grössere der beiden Zahlen p und q gleich q nimmt

$$\left[\frac{(q-1)p}{mq}\right] = \left[\frac{p - \frac{p}{q}}{m}\right] = \frac{p-1}{m},$$

und damit ist die Gleichung (9) gerechtfertigt.

Eisensteins Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste (Crelle's Journal XXVIII, p. 246) ist ein specieller Fall der in § 6 angestellten geometrischen Betrachtung; er beruht darauf,

dass $y = \frac{p}{q}x$ die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden ist, der man auch die Form $x = \frac{q}{p}y$ geben kann, und dass, wenn p und q relative Primzahlen sind, kein einziger der in Betracht kommenden Gitterpunkte in die Gerade selbst hineinfällt.

§ 9.

Die Gleichung (1) des vorigen Paragraphen kann man auch, wenn man die Zeichen p und q resp. durch m und n ersetzt, in folgender Weise schreiben

(1) $$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{m}{n}s\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{n}{m}s\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right].$$

In dieser Form gilt die Gleichung allgemein für zwei beliebige relative Primzahlen m und n, wie zuerst Gauss bemerkt hat (*Theorematis arithmetici demonstratio nova,* Gauss' Werke, Bd. II, p. 8; eine Anwendung findet sich in der *Theoria residuorum biquadraticorum* ibid. p. 145).

Es sei eine der beiden relativen Primzahlen gerade, die andere also ungerade. Die erstere bezeichne man mit n, die letztere mit m. Dann ist

$$\left[\left[\frac{n}{2}\right]\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{n}{2}\,\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m}{2}\right],$$

und damit ist die Richtigkeit von (1) auch für diesen Fall dargethan.

Bezeichnet man die auf der linken Seite von (1) befindlichen Summen mit S resp. T, so hat man

$$S + T = \left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right].$$

Nunmehr können wir den Wert der Summe $S + T$ auch für den Fall

angeben, dass m und n einen gemeinsamen Teiler haben. Es sei δ der grösste gemeinsame Teiler beider Zahlen, so dass die durch die Gleichungen

$$m = m'\delta,$$

$$n = n'\delta$$

definierten Zahlen m' und n' relativ prim zu einander sind. Wenn m und n beide $\equiv 1 \pmod 2$ sind, so setzen wir $m < n$ voraus; andernfalls nehmen wir n als gerade an. Alsdann führt die Wiederholung der oben angestellten Betrachtung leicht zu der Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{m}{n} s\right] + \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{n}{m} s\right] = \left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + \rho.$$

Die Zahl ρ gibt an, wie viele von den Brüchen $\frac{ms}{n}$ einen ganzzahligen Wert haben, während s die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ durchläuft, oder was dasselbe ist, ρ ist die Zahl, welche angibt, wie viele Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ Vielfache von n' sind. Folglich ist

$$\rho = \left[\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n'}\right] = \left[\frac{\left[\frac{\delta n'}{2}\right]}{n'}\right],$$

oder vermöge der leicht zu beweisenden Gleichung

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{c}{ab}\right]$$

(v. Dirichlet, *Zahlentheorie*, p. 28),

$$\rho = \left[\frac{\delta}{2}\right].$$

Es ist also in allen bisher betrachteten Fällen

$$S + T = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{\delta}{2}\right].$$

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo m und n ungerade und einander gleich sind. Dieser Fall lässt sich auf eine ähnliche Weise erledigen; kürzer aber führt die direkte Behandlung zum Ziel. Es ist

$$\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{m}{m}s\right]+\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{m}{m}s\right]=2\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]}s=\left[\frac{m}{2}\right]^2+\left[\frac{m}{2}\right].$$

Nun ist aber der grösste gemeinsame Teiler von m und m die Zahl m selbst. Es gilt somit immer, was für positive ganze Zahlen m und n auch bedeuten mögen, die Gleichung

$$S+T=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{\delta}{2}\right]. \tag{2}$$

(1) ist in (2) als specieller Fall enthalten, da der grösste gemeinsame Teiler zweier relativer Primzahlen die Einheit und $\left[\frac{1}{2}\right]=0$ ist.

Beispiel $m=9$, $n=18$; $\delta=9$.

$$S=\left[\frac{9}{18}\right]+\left[\frac{18}{18}\right]+\left[\frac{27}{18}\right]+\left[\frac{36}{18}\right]+\left[\frac{45}{18}\right]+\left[\frac{54}{18}\right]+\left[\frac{63}{18}\right]+\left[\frac{72}{18}\right]+\left[\frac{81}{18}\right]$$
$$=0+1+1+2+2+3+3+4+4=20.$$

$$T=\left[\frac{18}{9}\right]+\left[\frac{36}{9}\right]+\left[\frac{54}{9}\right]+\left[\frac{72}{9}\right]=2+4+6+8=20.$$

$$S+T=40=4\cdot 9+4=\left[\frac{9}{2}\right]\cdot\left[\frac{18}{2}\right]+\left[\frac{9}{2}\right].$$

Die Gleichung (2) kann man in folgender Weise geometrisch beweisen. Man konstruiere die Gerade $y=\frac{m}{n}x$, welche Gleichung man auch in der Form $x=\frac{n}{m}y$ schreiben kann. Hieraus folgt

$$S+T=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\rho, \tag{3}$$

wo ρ die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnet, die auf der Diagonale des durch die Axen und durch die Geraden $y=\frac{m}{2}$ und $x=\frac{n}{2}$ gebildeten

Rechtecks liegen; hierbei ist der Schnittpunkt der beiden letztgenannten Geraden, falls derselbe ein Gitterpunkt sein sollte, mitzurechnen. Von diesen Punkten erhält man, wie leicht einzusehen ist, jeden einmal und nur einmal, indem man den Bruch $\frac{m}{n}$ auf seine kleinste Benennung $\frac{m'}{n'}$ bringt, dann $\frac{m'}{n'}$ der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., $\left[\frac{\delta}{2}\right]$ multipliziert und jedesmal den Zähler der so gewonnenen Brüche zur y-Coordinate, den Nenner zur x-Coordinate eines Punktes macht. Wollte man $\frac{m'}{n'}$ mit einer ganzen Zahl r multiplizieren, die über $\left[\frac{\delta}{2}\right]$, also auch über $\frac{\delta}{2}$ liegt, so würden die Coordinaten des betreffenden Punktes $y = rm'$, $x = rn'$ resp. die Werte $\frac{m'\delta}{2} = \frac{m}{2}$ und $\frac{n'\delta}{2} = \frac{n}{2}$ übertreffen, folglich der Punkt zwar in die Gerade $y = \frac{m}{n}x$, aber ausserhalb des oben bezeichneten Rechtecks fallen. Es ist also die gesuchte Anzahl $\rho = \left[\frac{\delta}{2}\right]$, und infolge dessen geht (3) in die zu beweisende Gleichung (2) über.

§ 10.

Es soll jetzt versucht werden, gewisse Summen von grössten Ganzen analytisch auszudrücken, mit Benutzung einer oft angeführten Arbeit von ZELLER und einer Reihe von Untersuchungen von BOUNIAKOWSKY (*Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique* $E(x)$. Bulletin de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg, tome 28, p. 257 etc., p. 411 etc.; tome 29, p. 250 etc.).

Wir beschäftigen uns zunächst mit Summen von der Form

$$P_\alpha = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left[\frac{s^\alpha}{p}\right],$$

wo p eine Primzahl und α eine positive ganze Zahl mit Ausschluss der Null bedeutet. Setzt man

$$Q_\alpha = \sum_{s=1}^{s=\left[\frac{(p-1)^\alpha}{p}\right]} \left[\sqrt[\alpha]{sp}\right],$$

so ist nach dem in § 5 bewiesenen Satze

$$(1) \qquad P_a + Q_a = (p-1)\left[\frac{(p-1)^a}{p}\right].$$

Der Ausdruck $\left[\frac{(p-1)^a}{p}\right]$ ist eine rationale ganze Function $(a-1)^{\text{ten}}$ Grades von p; es ist nämlich für $a \equiv 0 \pmod 2$

$$\left[\frac{(p-1)^a}{p}\right] = p^{a-1} - a p^{a-2} + \frac{a(a-1)}{1.2} p^{a-3} \mp \ldots - \frac{a(a-1)\ldots 2}{1.2\ldots(a-1)},$$

und für $a \equiv 1 \pmod 2$

$$\left[\frac{(p-1)^a}{p}\right] = p^{a-1} - a p^{a-2} \pm \ldots + \frac{a(a-1)\ldots 2}{1.2\ldots(a-1)} - 1.$$

Beide Gleichungen lassen sich in folgender Weise in eine einzige zusammenfassen

$$\left[\frac{(p-1)^a}{p}\right] = p^{a-1} - a p^{a-2} \pm \ldots + (-1)^{a-1} \frac{a(a-1)\ldots 2}{1.2\ldots(a-1)} - 2\left\{\frac{a}{2} - \left[\frac{a}{2}\right]\right\}.$$

Die rechte Seite von (1) ist demnach eine rationale ganze Function von p. Stellt man nun folgende Reihe von Gleichungen auf (Zeller, Nachr. d. Götting. Ges. d. W. 1879, p. 254)

$$(2) \qquad \left|\begin{array}{l} 1^a = \left[\frac{1^a}{p}\right] p + r_1, \\ 2^a = \left[\frac{2^a}{p}\right] p + r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1)^a = \left[\frac{(p-1)^a}{p}\right] p + r_{p-1} \end{array}\right.$$

und addiert, so kommt

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{s=p-1} s^a = p\,.\,P_a + \sum_{s=1}^{s=p-1} r_s.$$

Der Ausdruck $\sum_{s=1}^{s=p-1} s^a$, den wir mit S_a bezeichnen wollen, lässt sich nach dem Newton'schen Satze rational und ganz ausdrücken durch die

symmetrischen Grundverbindungen der Elemente $1, 2, 3, \ldots, p-1$, und diese Grundverbindungen sind nach dem WILSON'schen Satze alle durch p teilbar mit Ausnahme der einen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$, für welche die Kongruenz gilt

$$(-1)^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \pmod p.$$

S_α wird also in allen denjenigen Fällen durch p teilbar sein, in denen die Zahl $\underline{|p-1}$ zur Darstellung der Summen gleich hoher Potenzen der $p-1$ Elemente nicht erforderlich ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn $\alpha < p-1$. Wir machen jetzt die Annahme $\alpha < p-1$. Alsdann ist S_α und somit auch $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s$ durch p teilbar. In denjenigen Fällen also, wo es gelingt $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s$ als rationale ganze Function von p darzustellen, ist P_α eine rationale ganze Function von p, von der man auch den Grad bestimmen kann. P_α lässt sich alsdann mit Hülfe der Gleichung (3) direkt bestimmen; aber es ist auch die Methode der unbestimmten Coefficienten anwendbar, so dass es nicht nötig ist, S_α und $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s$ wirklich zu berechnen.

Ein solcher Fall ist z. B. der, wo α und $p-1$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben (ZELLER, a. a. O. p. 255). Dann erscheinen nämlich, wie aus der Lehre von den Potenzresten bekannt ist (cf. DIRICHLET's *Zahlentheorie*, ed. 1879, p. 73), auf der rechten Seite der Gleichungen (2) die sämtlichen kleinsten positiven Reste von p mit Ausschluss der Null. Es wird also $\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s = \frac{p(p-1)}{2}$, und P_α ist rational und ganz durch p darstellbar, und zwar wird die betreffende Function in p vom α^{ten} Grade sein, indem nach einer bekannten Formel

$$S_\alpha = \frac{(p-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(p-1)^\alpha}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1} B_1 (p-1)^{\alpha-1}$$
$$- \frac{1}{4} B_2 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (p-1)^{\alpha-3}$$
$$+ \frac{1}{6} B_3 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (p-1)^{\alpha-5} \mp \ldots,$$

wo $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die auf einander folgenden BERNOULLI'schen Zahlen sind.

Auch Q_α ist, wie Gleichung (1) zeigt, unter den oben gemachten Voraussetzungen eine rationale ganze Function von p, die durch die Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden werden kann.

Es sei jetzt $\alpha = 2$ und p eine beliebige Primzahl. Die Primzahlen 2 und 3 brauchen nicht ausgeschlossen zu werden, da für jede positive Zahl p die Gleichung gilt

$$S_2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} s^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}.$$

Nun ist

$$(4) \qquad P_2 + Q_2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left[\frac{s^2}{p}\right] + \sum_{s=1}^{s=p-1} [\sqrt{sp}] = (p-1)^2,$$

indem $[\sqrt{(p-1)p}] = p - 1$ ist, ferner ist

$$(5) \qquad S_2 = p \cdot P_2 + \sum_{s=1}^{s=p-1} r_s.$$

Bezeichnet man mit R die Summe der quadratischen Reste von p, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=p-1} r_s = 2R.$$

Ist nun p von der Form $4n + 1$, so ergänzen sich je zwei quadratische Reste zu p, es ist also

$$R = \frac{(p-1)p}{4}.$$

Da nun S_2 eine Function 3. Grades von p ist, welche kein konstantes Glied enthält, so sind P_2 und Q_2 rationale ganze Functionen von p. Hieraus folgt die Berechtigung zu schreiben

$$(6) \qquad \begin{aligned} P_2 &= Ap^2 + Bp + C, \\ Q_2 &= A_1 p^2 + B_1 p + C_1. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen p der Reihe nach gleich 5, 13,

17, so ergeben sich je drei lineare Gleichungen für A, B, C und A_1, B_1, C_1, durch deren Auflösung man folgende Formeln gewinnt

$$(7)\qquad \sum_{s=1}^{s=p-1}\left[\frac{s^2}{p}\right]=\frac{p^2}{3}-p+\frac{2}{3}=\frac{(p-1)(p-2)}{3}$$

$$(8)\qquad \sum_{s=1}^{s=p-1}[\sqrt{sp}]=\frac{2p^2}{3}-p+\frac{1}{3}=\frac{(p-1)(2p-1)}{3},$$

welche resp. mit den von BOUNIAKOWSKY im »article 2$^{\underline{d}}$» der oben genannten Abhandlung p. 424 angegebenen Formeln (20) und (21) übereinstimmen.

Es versteht sich von selbst, dass uns der direkte Weg schneller zum Ziel geführt haben würde, wir haben hier die Methode der unbestimmten Coefficienten nur deshalb gewählt, um ein Beispiel davon zu geben.

Anders gestaltet sich die Sache für eine Primzahl q von der Form $4n+3$. Auch dann ist natürlich $\sum_{s=1}^{s=q-1} r_s = 2R$ durch q teilbar, aber die Abhängigkeit der Zahl R von q ist nicht so einfach, dass sie sich durch eine rationale ganze Function von q ausdrücken liesse. Aus (4), (5) und (6) ergeben sich für P_2 und Q_2 leicht die Ausdrücke

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}\left[\frac{s^2}{q}\right]=\frac{(q-1)(2q-1)}{6}-\frac{2R}{q},$$

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}]=\frac{(q-1)(4q-5)}{6}+\frac{2R}{q}.$$

Diese beiden Formeln gelten allgemein für jede Primzahl q; sie enthalten (7) und (8) als speciellen Fall.

Bezeichnet man mit R' die Summe der quadratischen Nichtreste von q, so ist

$$R+R'=\frac{q(q-1)}{2}$$

$$\frac{2R}{q}=q-1-\frac{2R'}{q},$$

also

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}\left[\frac{s^2}{q}\right]=\frac{(q-1)(2q-7)}{6}+\frac{2R'}{q},$$

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}]=\frac{(q-1)(4q+1)}{6}-\frac{2R'}{q}.$$

Wir gehen jetzt über zu der Betrachtung der Summen

$$\sum_{s=1}^{s=m-1}[\sqrt{sm}] \quad \text{und} \quad \sum_{s=1}^{s=m-1}\left[\frac{s^2}{m}\right],$$

wo m eine beliebige positive ganze Zahl ist. Es gilt die Gleichung

(9) $$\sum_{s=1}^{s=m-1}[\sqrt{sm}]+\sum_{s=1}^{s=m-1}\left[\frac{s^2}{m}\right]=(m-1)^2+\rho,$$

wo die Zahl ρ angibt, wie viele unter den Produkten $1.m, 2.m, 3.m, \ldots, (m-1)m$ volle Quadrate sind. Wenn m aus lauter verschiedenen Primzahlen besteht, so ist offenbar $\rho = 0$. Ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo $a, b, c \ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen und die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle gerade sind, ist also m eine volle Quadratzahl, so enthält die Reihe $1.m, 2.m, \ldots, m.m$ offenbar ebenso viele Quadratzahlen als die Reihe $1, 2, \ldots, m$, ihre Anzahl ist also $\sqrt{m} = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots$, mithin ist in diesem Falle

$$\rho = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots - 1.$$

Ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gerade, $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ ungerade sind, so muss eine Zahl s, welche mit m multipliziert ein volles Quadrat ergeben soll, den Faktor $a'b'c' \ldots$ und ausserdem nur noch einen quadratischen Faktor enthalten. Befreit man also die Zahl s von dem Faktor $a'b'c' \ldots$, so muss ein volles Quadrat übrig bleiben. Legt man mithin den Zahlen s ausserdem noch die Bedingung auf, nicht grösser als m zu sein, so stimmt ihre Anzahl überein mit der Anzahl der in der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots a'^{\alpha'-1} b'^{\beta'-1} c'^{\gamma'-1} \ldots$$

enthaltenen Quadratzahlen, sie ist also gleich $a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\frac{\alpha'-1}{2}} b'^{\frac{\beta'-1}{2}} c'^{\frac{\gamma'-1}{2}}$ oder gleich $a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\left[\frac{\alpha'}{2}\right]} b'^{\left[\frac{\beta'}{2}\right]} c'^{\left[\frac{\gamma'}{2}\right]} \ldots$.

Demnach ist in diesem Falle

$$\rho = a^{\frac{\alpha}{2}} b^{\frac{\beta}{2}} c^{\frac{\gamma}{2}} \ldots a'^{\left[\frac{\alpha'}{2}\right]} b'^{\left[\frac{\beta'}{2}\right]} c'^{\left[\frac{\gamma'}{2}\right]} \ldots - 1.$$

Beide Werte für ρ lassen sich in einen Ausdruck vereinigen. Sind $a, b, c \ldots$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen, und ist $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, so ist

$$\rho = a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1.$$

Die Zahl m möge jetzt aus lauter verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n + 1$ bestehen. Dann handelt es sich darum, $\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$ zu bestimmen. Zunächst ist klar, dass jeder quadratische Rest r von m durch einen andern quadratischen Rest r' von m zu m ergänzt wird. Denn aus der Möglichkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv r \pmod{m}$$

folgt sofort die Möglichkeit der Kongruenz

$$x^2 \equiv - r \pmod{m},$$

da die negative Einheit quadratischer Rest jedes einzelnen der in m enthaltenen Primfaktoren ist. Anderseits hat die Kongruenz

$$x^2 \equiv r \pmod{m}$$

genau ebenso viele Wurzeln als die Kongruenz

$$x^2 \equiv - r \pmod{m}.$$

Setzt man also

$$r + r' = m$$

und stellt die Gleichungen auf

$$1^2 = \left[\frac{1^2}{m}\right] m + r_1$$

$$2^2 = \left[\frac{2^2}{m}\right] m + r_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(m - 1)^2 = \left[\frac{(m-1)^2}{m}\right] m + r_{m-1},$$

so kommt jeder Rest r genau so oft vor, als der zugehörige Rest r'. Hieraus folgt

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s = \frac{m(m-1)}{2},$$

und da die Zahl ρ unter der gemachten Voraussetzung verschwindet, so dürfen wir mit Berücksichtigung der Gleichung (9) und der für jede Zahl m geltenden Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} s^2 = m \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$$

folgenden Satz aussprechen:

Wenn eine Zahl m aus lauter verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n + 1$ besteht, so gelten die Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-2)}{3}, \tag{10}$$

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(2m-1)}{3}. \tag{11}$$

Es sei jetzt $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo die verschiedenen in m enthaltenen Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ alle die Form $4n + 1$ haben. Dann wird die oben zur Berechnung von $\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s$ angestellte Betrachtung nur insofern alteriert, als r auch gleich Null werden kann, und zwar geschieht dies so oft, als die vorhin mit ρ bezeichnete Zahl angibt. Die Zahl ρ, deren

Wert gleich $a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ gefunden wurde, ist offenbar gerade; denkt man sich demnach $\frac{\rho}{2}$-mal statt des Restes Null den Rest m, so ergänzen sich wiederum stets zwei Reste r und r' zu m, und jeder Rest r wird ebenso oft erscheinen als der zugehörige Rest r'. Hierbei ist die Zahl m jedoch $\frac{\rho}{2}$-mal zu viel mitgerechnet worden, wir erhalten also die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} r_s = \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m\rho}{2},$$

und es wird

$$\sum_{s=1}^{s=m-1} s^2 = m \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m\rho}{2};$$

oder

$$\frac{(m-1)(2m-1)}{6} = \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m-1}{2} - \frac{\rho}{2}.$$

Mit Hülfe einer einfachen Rechnung ergibt sich hieraus

$$(12) \qquad \sum_{s=1}^{s=m-1} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-2)}{3} + \frac{\rho}{2},$$

und vermöge der Gleichung (9)

$$(13) \qquad \sum_{s=1}^{s=m-1} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(2m-1)}{3} + \frac{\rho}{2}.$$

Die Gleichungen (10) und (11) gehen resp. aus (12) und (13) hervor, indem man $\rho = 0$ setzt.

Beispiel $m = 25 = 5^2$.

Die direkte Berechnung ergibt

$$\sum_{s=1}^{s=24} \left[\frac{s^2}{25}\right] = 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11$$
$$+ 12 + 14 + 16 + 17 + 19 + 21 + 23 = 186.$$

Die Berechnung nach (12) ergibt, da ρ den Wert $5^1 - 1 = 4$ hat,

$$\sum_{s=1}^{s=24}\left[\frac{s^2}{25}\right] = \frac{24.23}{3} + \frac{4}{2} = 186.$$

Wir betrachten jetzt die Summen

$$P = \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{s^2}{p}\right]$$

und

$$Q = \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{4}}[\sqrt{sp}],$$

wo p eine Primzahl von der Form $4n + 1$ bedeutet. Da, wie leicht zu sehen

$$\left[\sqrt{\frac{(p-1)p}{4}}\right] = \frac{p-1}{2}$$

ist, so gilt die Gleichung

$$P + Q = \frac{(p-1)^2}{8}.$$

Anderseits erhält man durch ein schon mehrfach benutztes Verfahren die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} s^2 = p.P + R,$$

wenn man mit R wiederum die Summe der quadratischen Reste von p bezeichnet. Nun ist

$$R = \frac{p(p-1)}{4}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} s^2 = \frac{p(p-1)(p+1)}{24},$$

mithin

$$P = \frac{(p-1)(p-5)}{24},$$

$$Q = \frac{p^2-1}{12}.$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit (11) sofort die von BOUNIAKOWSKY aufgestellten Gleichungen (Bulletin de l'acad. imp. de S:t Pétersbourg, tome 28, p. 257, 263)

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-5}{4}}[\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)(p-5)}{12},$$

$$\sum_{s=\frac{p-1}{4}}^{s=p-1}[\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)(7p+1)}{12}.$$

Für eine Primzahl von der Form $4n + 3$ hat man zunächst, da

$$\left[\frac{(q-1)^2}{4q}\right] = \left[\frac{q-2}{4} + \frac{1}{4q}\right] = \frac{q-3}{4}$$

ist, die Relation

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{q-1}{2}\,\frac{q-3}{4}.$$

Ferner ist, wie leicht zu beweisen,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{s^2}{q}\right] = \frac{q^2-1}{24} - \frac{R}{q},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(q-5)}{12} + \frac{R}{q},$$

und vermöge der Relation

$$R + R' = \frac{q(q-1)}{2},$$

wo R' die Summe der quadratischen Nichtreste von q bezeichnet,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{q-3}{4}}[\sqrt{sq}] = \frac{q^2-1}{12} - \frac{R'}{q}.$$

(BOUNIAKOWSKY, a. a. O. p. 415). Da nun, wie pag. 39 gezeigt,

$$\sum_{s=1}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(4q-5)}{6} + \frac{2R}{q},$$

$$= \frac{(q-1)(4q+1)}{6} - \frac{2R'}{q},$$

so folgt

$$\sum_{s=\frac{q+1}{4}}^{s=q-1}[\sqrt{sq}] = \frac{(q-1)(7q-5)}{12} + \frac{R}{q},$$

$$= \frac{(q-1)(7q+1)}{12} - \frac{R'}{q}.$$

(a. a. O. p. 419, 420).

Es sei wiederum $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ eine Zahl, deren Primfaktoren $a, b, c, \ldots$ alle die Form $4n+1$ haben. Dann ist

$$(14) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}}[\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)^2}{8} + \rho',$$

wo die Zahl ρ' angibt, wie viele unter den Produkten $1.m,\ 2.m, \ldots, \frac{m-1}{4}.m$ volle Quadrate sind, oder was dasselbe ist, wie viele unter den Quadraten $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ durch m aufgehen. Diese Zahl ist aber gleich der Hälfte derjenigen Zahl, welche oben mit ρ bezeichnet und gleich $a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ gefunden worden ist, indem zu jeder zwischen 1 und $\frac{m-1}{2}$ liegenden Zahl λ, deren Quadrat durch m aufgeht, eine zwischen $\frac{m+1}{2}$ und $m-1$ liegende Zahl $m-\lambda$ gehört, deren Quadrat ebenfalls durch m aufgeht und umgekehrt. Denn (cf. DIRICHLET, *Zahlentheorie,* p. 76) wenn r irgend eine ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$(m-r)^2 = m^2 - 2rm + r^2 \equiv r^2 \pmod{m}.$$

Hieraus folgt aber weiter, dass die Quadrate $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2, \left(\frac{m+3}{2}\right)^2, \ldots, (m-1)^2$

dieselben Reste nach dem Modul m liefern, wie die Quadrate 1^2, 2^2, $\ldots$, $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Jetzt braucht man sich blos der pag. 42 angestellten Betrachtungen zu erinnern, um zu erkennen, dass die Gleichung besteht

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} s^2 = m\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{s^2}{m}\right] + \frac{m(m-1)}{4} - \frac{m\rho}{4},$$

und da die linke Seite den Wert $\frac{m(m-1)(m+1)}{24}$ hat, so folgt

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-5)}{24} + \frac{\rho}{4},$$

folglich durch Anwendung von (14)

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{4}} [\sqrt{sm}] = \frac{m^2-1}{24} + \frac{\rho}{4}.$$

$\rho = a^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots - 1$ ist durch 4 teilbar; es verschwindet, sobald die verschiedenen in m enthaltenen Primfaktoren alle nur in der ersten Potenz erscheinen. Für solche Zahlen, welche dieser Bedingung genügen, gelten also dieselben Relationen, die oben für Primzahlen von der Form $4n+1$ angegeben wurden, nämlich

$$(15) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{(m-1)(m-5)}{24},$$

$$(16) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-5}{4}} [\sqrt{sm}] = \frac{(m-1)(m-5)}{12}.$$

Hierin liegt die Erklärung für die von Bouniakowsky (a. a. O. p. 265) beobachtete Thatsache dass die Gleichung (16) für $m = 25$ nicht richtig ist, wohl aber für $m = 65$. Für $m = 65$ ist eben $\rho = 0$, so dass

$$\sum_{s=1}^{s=15} [\sqrt{65s}] = \frac{64 \cdot 60}{12} = 320$$

ist, während für $m = 25$ die Zahl ρ den Wert 4 hat, so dass

$$\sum_{s=1}^{s=5}[\sqrt{25s}] = \frac{24 \cdot 20}{12} + 1 = 41$$

wird.

Die obere Grenze der Summation möge jetzt bis zu einem Vielfachen von m ausgedehnt werden. Für zwei beliebige positive ganze Zahlen m und k gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = k^3m^2 + \rho'',$$

wo ρ'' angibt, wie viele unter den Brüchen $\frac{1^2}{m}, \frac{2^2}{m}, \frac{3^2}{m}, \ldots, \frac{k^2m^2}{m}$ ganze Zahlen sind. Es mögen nun sämtliche in $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ enthaltenen Primfaktoren die Form $4n + 1$ haben. Dann ist

$$\rho'' = k(\rho + 1) = ka^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} b^{\left[\frac{\beta}{2}\right]} c^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \ldots .$$

Denn es sind zunächst die k Quadrate m^2, $(2m)^2$, $(3m^2)$, $\ldots$, $(km)^2$ durch m teilbar; ferner ist die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m - 1$, deren Quadrate durch m aufgehen, gleich ρ; es liegen aber zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Vielfachen von m (mit Ausschluss beider Grenzen) ebenfalls ρ Zahlen deren Quadrate durch m teilbar sind, wie aus der Gleichung hervorgeht

$$(\mu m + r)^2 = \mu^2 m^2 + 2\mu m r + r^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass ρ'' in der That den Wert $k(\rho + 1)$ hat. Bildet man nun die Gleichungen

$$1^2 = \left[\frac{1^2}{m}\right] m + r_1,$$

$$2^2 = \left[\frac{2^2}{m}\right] m + r_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$k^2m^2 = \left[\frac{k^2m^2}{m}\right] m + r_{km}$$

und addiert, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=km} s^2 = m\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] + \sum_{s=1}^{s=km} r_s.$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=km} s^2 = \frac{km(km+1)(2km+1)}{6},$$

$$\sum_{s=1}^{s=km} r_s = k\sum_{s=1}^{s=m} r_s = k\frac{m(m-1)}{2} - k\frac{m\rho}{2},$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=km}\left[\frac{s^2}{m}\right] = \frac{k(m+1)(2km+1)}{6} - \frac{k(m-1)}{2} + \frac{k\rho}{2},$$

und vermöge (17) nach einfacher Rechnung

$$\sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = \frac{k}{6}[4k^2m^2 - 3m(k-1) + 2] + \frac{k\rho}{2}.$$

Fügt man zu den bisherigen Bedingungen noch die neue hinzu, dass alle in m enthaltenen Primfaktoren von einander verschieden seien, so verschwindet ρ, und es ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=k^2m}[\sqrt{sm}] = \frac{k}{6}[4k^2m^2 - 3m(k-1) + 2],$$

welche Bouniakowsky für den Fall abgeleitet hat, dass m eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Ausdrücke $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}]$, $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[a]{s}]$ zu berechnen, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist. Setzt man $[\sqrt{n}] = m$, so gilt die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}] + \sum_{s=1}^{s=m}[s^2] = mn + m,$$

da sämtliche m Glieder der zweiten Summe auch nach Weglassung der

eckigen Klammern ihren ganzzahligen Wert behalten. Nun hat das zweite Glied der linken Seite den Wert $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, es ist also

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{s}] = m(n+1) - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \tag{18}$$

Ebenso folgt, wenn man $[\sqrt[3]{n}] = m$ setzt, aus den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{s}] + \sum_{s=1}^{s=m} s^3 = mn + m,$$

$$\sum_{s=1}^{s=m} s^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

die Richtigkeit der Formel

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{s}] = m(n+1) - \frac{m^2(m+1)^2}{4}. \tag{19}$$

Da für einen beliebigen positiven ganzen Exponenten α die Gleichung besteht

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{s}] + \sum_{s=1}^{s=m} s^\alpha = mn + m,$$

wo $m = [\sqrt[\alpha]{n}]$ ist, und da sich $\sum_{s=1}^{s=m} s^\alpha$ vermittelst der EULER'schen Summenformel ausdrücken lässt, so leuchtet ein, dass man in ganz derselben Weise die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[\alpha]{s}]$ berechnen kann.

Die Formeln (18) und (19) unterscheiden sich nur der Form nach von den entsprechenden von BOUNIAKOWSKY aufgestellten Gleichungen (Bulletin de l'acad. imp. de S:t Pétersbourg, tome 29, p. 252 und 270).

Ebenso wie die Summe

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n}]$$

lassen sich auch die Summen

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{2n-1}]$$

und

$$[\sqrt{2}] + [\sqrt{4}] + [\sqrt{6}] + \dots + [\sqrt{2n}]$$

auf eine einfache Weise darstellen. Setzt man $[\sqrt{2n-1}] = m$, so ist

$$\sum_{s=2}^{s=n}[\sqrt{2s-1}] + \sum_{s=2}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right] = -1 + mn + \left[\frac{m-1}{2}\right],$$

weil unter den vorkommenden Werten von $\frac{s^2+1}{2}$ sich $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ ganze Zahlen befinden. Fügt man auf beiden Seiten zwei Einheiten hinzu, so kommt

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}] + \sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right] = mn + \left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Nun ist

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2+1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{m(m+1)(2m+1)}{12},$$

folglich

$$(20)\qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] - \frac{m(m+1)(2m+1)}{12}.$$

Zur Berechnung der Summe $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]$ schlagen wir den nämlichen Weg ein. Setzt man $[\sqrt{2n}] = m$, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}] + \sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2}{2}\right] = mn + \left[\frac{m}{2}\right],$$

weil unter den Quadraten $1^2, 2^2, \ldots, m^2$ sich $\left[\frac{m}{2}\right]$ gerade Zahlen befinden. Es ist aber

$$\sum_{s=1}^{s=m}\left[\frac{s^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{12} - \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

Demnach ist

$$(21)\qquad \sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}] = mn + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] - \frac{m(m+1)(2m+1)}{12}.$$

Die den Formeln (20) und (21) entsprechenden Darstellungen der Summen $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s-1}]$ und $\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt{2s}]$, finden sich bei Bouniakowsky (a. a. O. p. 260 sqq.)

Auf demselben Wege, auf dem die Formeln (20) und (21) gewonnen wurden, gelangt man zu den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

$$m = [\sqrt[3]{2n-1}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[3]{2s}] = mn + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

$$m = [\sqrt[3]{2n}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[a]{2s-1}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^a,$$

$$m = [\sqrt[a]{2n-1}];$$

$$\sum_{s=1}^{s=n}[\sqrt[a]{2s}] = mn + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=m}s^a,$$

$$m = [\sqrt[a]{2n}].$$

SUR LA VALEUR DE QUELQUES SÉRIES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION $E(x)$

PAR

M. A. STERN

À BERNE.

La considération qui m'a fait trouver une démonstration élémentaire du théorème

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(mx) - E(x)$$

qu'on doit à M. HERMITE,[1] peut aussi servir à trouver la valeur de diverses séries qui dépendent de la fonction $E_2(x)$, fonction qui, selon la notation proposée par M. HERMITE, a la valeur

$$E_2(x) = \frac{E(x)E(x+1)}{1 \cdot 2}.$$

Si k et m sont deux nombres entiers, $k < m$ et

$$x \geqq E(x) + \frac{k}{m}, \qquad x < E(x) + \frac{k+1}{m},$$

on aura, r désignant un nombre contenu dans la série $1, 2, \ldots, m-1$,

$$E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(x) \quad \text{ou} \quad E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(x) + 1$$

selon que le nombre r est un des nombres $1, 2, \ldots, m-k-1$ ou un des nombres $m-k, \ldots, m-1$ et il s'ensuit qu'alors la fonction

$$E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) = \frac{E\left(x+\frac{r}{m}\right)E\left(x+\frac{r}{m}+1\right)}{1 \cdot 2}$$

[1] Voir T. 5, p. 315 et T. 8, p. 93 de ce journal.

aura la valeur $E_2(x)$ ou $E_2(x+1)$. Ainsi dans la série $\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)$ les $m-k-1$ premiers termes auront tous la valeur $E_2(x)$ tandis que chacun des k termes suivants sera $=E_2(x+1)$, et la valeur de la série entière sera

$$=(m-k-1)E_2(x)+kE_2(x+1)=(m-1)E_2(x)+kE(x+1).$$

En substituant au lieu de k sa valeur $E(mx)-mE(x)$ on trouve

$$(1)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)=E(mx)E(x)+E(mx)-(m+1)E_2(x).$$

Considérons la série

$$\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right).$$

La somme des $m-k-1$ premiers termes aura la valeur

$$\left[\frac{m(m-1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}\right]E_2(x)$$

et la somme des k termes suivants sera $\frac{k(k+1)}{2}E_2(x+1)$. La valeur de la série entière sera donc

$$\frac{k(k+1)}{2}E_2(x+1)+\left[\frac{m(m-1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}\right]E_2(x).$$

Mais $E_2(x+1)-E_2(x)$ étant $=E(x+1)$ on aura

$$(2)\quad \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)=\frac{m(m-1)}{2}E_2(x)+\frac{k(k+1)}{2}E(x)+\frac{k(k+1)}{2}.$$

En supposant $E(x)=0$ pour toutes les valeurs de x plus petites que l'unité positive, il est évident que la série $\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x-\frac{r}{m}\right)$ s'évanouit pour les valeurs de $x \leqq 1$. On peut donc prendre $x=1+z$, z étant un *nombre positif*, et alors la série se change en

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(z+\frac{r}{m}\right)=E(mz)-E(z).$$

Ainsi on aura

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x - \frac{r}{m}\right) = E(m[x - 1]) - E(x - 1).$$

Cherchons maintenant la valeur de la série

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right).$$

En prenant toujours $x \overline{\overline{>}} E(x) + \frac{k}{m}$, $x < E(x) + \frac{k+1}{m}$ on voit que la valeur de $E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)$ est $= E_2(x)$ ou $E_2(x - 1)$ selon que le nombre r est $\underline{\underline{<}}\, k$ ou $> k$. Ainsi la somme des k premiers termes de la série est $\left[\frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}\right] E_2(x)$ tandis que la somme des termes suivants est $= \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E_2(x - 1)$, et comme on a

$$E_2(x) = E_2(x - 1) + E(x)$$

il s'ensuit

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2} E_2(x) - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E(x).$$

En ajoutant ensemble les deux séries (2) et (4) on obtient

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)$$
$$= m(m - 1) E_2(x) - \frac{m^2 E(x)}{2} + \frac{m(2k + 1)}{2} E(x) + \frac{k(k + 1)}{2}$$

et en substituant $E(mx) - mE(x)$ au lieu de k on aura, après quelques simples réductions,

$$(5) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = E_2(mx) - mE_2(x).$$

C'est un théorème qu'on doit aussi à M. Hermite.[1]

---

[1] Voir T. 5, p. 315 et *Correction* à la suite de la table des matières du T. 8 de ce journal.

Si, au lieu de la série (4) on considère la série

$$\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)$$

on aura

$$(6) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = kE_2(x) + (m - k - 1)E_2(x - 1)$$
$$= \frac{m-1}{2}[E(x)]^2 - \frac{m-2k-1}{2}E(x).$$

En prenant la somme et la différence des séries (1) et (6) on obtient

$$(7) \quad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = (m-1)[E(x)]^2 + 2kE(x) + k,$$

$$(8) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) - \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right).$$

Les mêmes considérations conduisent à

$$(9) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} rE_2\left(x + \frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2}E_2(x) + \frac{(2m-1)k - k^2}{2}E(x+1),$$

$$(10) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} rE_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2}E_2(x-1) + \frac{k(k+1)}{2}E(x)$$

et la somme de ces deux dernières séries aura la valeur

$$m(m-1)[E(x)]^2 + mkE(x) + \frac{(2m-1)k - k^2}{2}.$$

On voit aisément que la même méthode donne la valeur d'un grand nombre de séries semblables.

Berne le 20 février 1887.

ÜBER GEWISSE TRINOMISCHE KOMPLEXE ZAHLEN

VON

K. SCHWERING
in COESFELD.

Seien p und λ irgend zwei reelle ungerade Primzahlen, x eine Wurzel der Gleichung

$$x^p = 1,$$

α eine solche der Gleichung

$$\alpha^\lambda = 1,$$

wo aber $x = 1$ und $\alpha = 1$ ausgeschlossen werden soll und

$$p = 2n\lambda + 1.$$

Ferner möge g eine primitive Wurzel (mod p) sein. Setzen wir dann

$$(\alpha, x) = x + \alpha . x^g + \alpha^2 . x^{g^2} + \alpha^3 . x^{g^3} + \ldots + \alpha^{p-2} . x^{g^{p-2}},$$

so ist die von C. G. J. JACOBI eingeführte ψ-Funktion durch die Gleichung gegeben:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha^h, x).(\alpha^k, x)}{(\alpha^{h+k}, x)}.$$

Mit der Theorie dieser ψ-Funktion haben sich die hervorragendsten Mathematiker beschäftigt. Insbesondere hat schon JACOBI gezeigt, dass sich die Anzahl der wirklich verschiedenen ψ stets auf $\frac{\lambda}{6}$ (in runder Zahl) reduciren lasse, und Herr L. KRONECKER hat in einem sehr interessanten Aufsatze *Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, Seite 338 ff.) bewiesen, dass

die Darstellung des Ausdruckes $(\alpha, x)^\lambda$ durch Produkte konjugirter ψ — mit gewissen Eigenschaften der trinomischen komplexen Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m; \zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 1 = 0$$

zusammenhängt. Diese Untersuchungen KRONECKER's zwingen zur Darstellung der *Norm* jener komplexen Zahlen, und so trat mir in einem höchst interessanten Specialfalle jene in theoretischer und besonders in praktischer Beziehung so wichtige Aufgabe entgegen, *die Norm einer trinomischen komplexen Zahl anzugeben.* Das blosse mechanische Ausrechnen der Norm ist nicht allein zeitraubend, sondern auch von gar geringem allgemeineren Vorteil. *Ich stellte mir daher die Aufgabe, ein Verfahren zu ermitteln, welches die Norm einer trinomischen komplexen Zahl schnell und sicher zu finden gestattet.* Die Lösung ergab sich durch Darstellung der Norm als algebraische *Form.* Diese Formen scheinen eine genauere Beachtung zu verdienen, da ihre *Koefficienten* viele merkwürdige Eigenschaften zeigen und die *Zahl der wesentlich verschiedenen Formen* in genauem Zusammenhange mit der durch L. KRONECKER gegebenen Zurückführung der ψ-Funktionen sich befindet.

§ 1.

Sei λ eine Primzahl und α eine komplexe Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$. Wir betrachten die Zahl $z + \alpha - \alpha^{\nu+1}$, wo ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \lambda - 2$ ist. Wir suchen die *Norm* dieser Zahl, also:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = (z + \alpha - \alpha^{\nu+1})(z + \alpha^2 - \alpha^{2\nu+2}) \ldots (z + \alpha^{\lambda-1} - \alpha^{(\lambda-1)(\nu+1)}),$$

oder

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = \prod(z + \alpha^h - \alpha^{h\nu+h}). \qquad (h = 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

Zu diesem Zwecke gehen wir nach der NEWTON-WARING'schen Methode zu Werke. Wir bilden aus den Potenzsummen der $\lambda - 1$ Grössen $-\alpha^r + \alpha^{r(\nu+1)}$ die Koefficienten der Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Wurzeln sie sind. Wenn man setzt:

$$F(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$
$$F(\alpha^r) = a_0 + a_1\alpha^r + a_2\alpha^{2r} + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{r(\lambda-1)},$$

dann ist

$$F(\alpha) + F(\alpha^2) + \ldots + F(\alpha^{\lambda-1}) = \sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r)$$

und, weil $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0$,

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r) = (\lambda - 1)a_0 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{\lambda-1} = \lambda a_0 - F(1).$$

Wir haben also:

$$(1) \qquad \sum_1^{\lambda-1}{}_r F(\alpha^r) = \lambda a_0 - F(1).$$

Wenden wir diese Schlüsse jetzt auf unsere Potenzsummen an. Die Summe der h^{ten} Potenzen ist:

$$(2) \qquad s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^r + \alpha^{r(\nu+1)})^h.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze, so wird das k^{te} Glied werden:

$$(-1)^{h+k} \cdot \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \alpha^{r(h+k\nu)}.$$

Wie Formel (1) zeigt, haben wir nun zunächst dasjenige k zu ermitteln, für welches $h + k\nu$ *teilbar durch* λ *wird*, denn dieses Glied verdient die Bezeichnung a_0. Da $h > k$ und $h < \lambda$, so hat die Kongruenz $h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ nur *eine* Auflösung, es entsteht nur *ein* solches Glied. Zudem ist $F(1) = 0$, da $F(\alpha) = (-\alpha + \alpha^{\nu+1})^h$. Folglich liefert uns (1) folgenden Wert:

$$(3) \qquad s_h = \lambda \cdot (-1)^{h+k} \cdot \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k},$$

wo zu dem *gegebenen* h das zugeordnete k so zu bestimmen ist, dass wird:

$$(4) \qquad \left| \begin{array}{l} h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ h > k. \end{array} \right.$$

Zur Auffindung der Zahlenpaare h, k geben wir nun folgende Vorschrift: *Man schreibe alle Zahlen von* 1 *bis* $\lambda - 1$ *nieder. Unter jede*

schreibe man den kleinsten positiven Rest der betreffenden mit ν multiplicirten Zahl. Dann addire man die übereinander stehenden Zahlenpaare. Ist die Summe grösser als λ, so verwerfe man das Paar. Ist die Summe kleiner als λ, so hat man ein Zahlenpaar gewonnen. Denn die betreffende Zahl der ersten Reihe ist k und die darunter stehende Zahl der zweiten Reihe gibt von λ subtrahirt h.

Beweis. Ist die Zahl der ersten Reihe k, so ist die darunter stehende Zahl r_ν der zweiten Reihe so beschaffen, dass $r_\nu \equiv k\nu \pmod{\lambda}$ und zugleich $r_\nu + k < \lambda$. Dann ist also $\lambda - r_\nu + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ und zugleich $\lambda - r_\nu > k$. Folglich besitzt $\lambda - r_\nu$ beide in (4) angegebenen Eigenschaften der Zahlen h. Man erhält auch *sämtliche* h durch das obige Verfahren. Denn h muss gleich $\lambda - r_\nu$ sein, um der Kongruenz $h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ zu genügen und $h > k$ zieht $\lambda > r_\nu + k$ nach sich.

Die Anzahl der Zahlenpaare h, k ist genau gleich $\frac{\lambda - 1}{2}$.

Beweis. Zu jedem Zahlenpaare h, k gehört ein zweites $\lambda - h, \lambda - k$, welches auch der Kongruenz $\lambda - h + \nu(\lambda - k) \equiv 0 \pmod{\lambda}$ genügt. Aber der zweiten Bedingung (4) genügt es *nicht*. Denn, wenn $h > k$, so ist $\lambda - h < \lambda - k$. Zu jedem »passenden» Zahlenpaare h, k gehört ein »nicht passendes». Also ist die Zahl der »passenden» die Hälfte der sämtlichen, w. z. b. w.

Diese Zahlenpaare h, k treten im wesentlichen schon bei E. KUMMER auf; sie erscheinen ihm bei Zerlegung der Funktion $\psi(\alpha)$ in ihre idealen Primfaktoren. Vergl. auch BACHMANN, *die Lehre von der Kreisteilung*, (Leipzig, Teubner 1872) S. 274.

Gehört zu einem h kein passendes k, so ist $a_0 = 0$, also $s_h = 0$. Also:

Die Hälfte aller auftretenden Potenzsummen hat den Wert Null.

Zahlenbeispiel: $\lambda = 11$, $\nu = 2$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9.

$k = 1, 2, 3, 6, 7,$

$h = 9, 7, 5, 10, 8.$

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_6 = 0; \qquad s_5 = 11.10, \qquad s_7 = -11.21,$$

$$s_8 = -11.8, \qquad s_9 = 11.9, \qquad s_{10} = 11.210.$$

Noch eine wichtige Bemerkung über die h, k müssen wir machen. Die Summe beliebig vieler h, welche kleiner als λ ist, wird immer wieder eine Zahl h und die Summe der zugehörigen k ist das zur Summe gehörige k. Denn aus

$$h_1 + k_1\nu \equiv 0, \qquad h_2 + k_2\nu \equiv 0, \quad \ldots, \quad h_r + k_r\nu \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$h_1 > k_1 \quad , \qquad h_2 > k_2 \quad , \quad \ldots, \quad h_r > k_r$$

folgt:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r + \nu(k_1 + k_2 + \ldots + k_r) \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r > k_1 + k_2 + \ldots + k_r.$$

Die Summen erfüllen beide Bedingungen (4), sind also Zahlenpaare aus der Reihe der h, k. Hieraus folgt, dass *die Summe von Zahlen h, so lange sie kleiner als λ bleibt, niemals zu einem »nicht passenden« Zahlenpaare führen kann, also nicht zu einem Zahlenpaare, dessen s_h verschwindet.* Und *eine Zahl h, deren zugehöriges k die Einheit ist, kann niemals als Summe anderer Zahlen h erscheinen.*

Beispiel: $\lambda = 29$, $\nu = 11$.

$$\left|\begin{array}{l} h = 7,\ 10,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\ 20,\ 21,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28, \\ k = 2,\ \ 7,\ 12,\ \ 4,\ \ 9,\ \ 1,\ 14,\ \ 6,\ 19,\ 11,\ \ 3,\ 24,\ 16,\ \ 8. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 7 + 7 + 7 = 21 \\ 2 + 2 + 2 = 6 \end{array}\right|, \qquad \left.\begin{array}{r} 10 + 13 = 23 \\ 7 + 12 = 19 \end{array}\right|, \qquad \left.\begin{array}{r} 7 + 7 + 10 = 24 \\ 2 + 2 + 7 = 11 \end{array}\right|.$$

§ 2.

Setzen wir jetzt:

(5) $$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + p_1 z^{\lambda-2} + p_2 z^{\lambda-3} + \ldots + p_{\lambda-1}.$$

Dann lautet die WARING'sche Formel:

(6) $$p_i = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \ldots i^{\lambda_i} \cdot \underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2} \ldots \underline{|\lambda_i}} \cdot s_1^{\lambda_1} \cdot s_2^{\lambda_2} \ldots s_i^{\lambda_i}.$$

Dabei ist die Summation auf alle Wertsysteme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ zu erstrecken, welche der Gleichung genügen:

(7) $$i = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i.$$

Die WARING'sche Formel gehört zu den bekanntesten Gleichungen der Algebra. Man kann ihre Richtigkeit folgendermassen darthun. Sei

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n.$$

Dann ist:

$$\frac{F(z)}{z^n} = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_n}{z}\right).$$

Nun ist:

$$\log\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) = -\frac{z_1}{z} - \frac{1}{2}\frac{z_1^2}{z^2} - \frac{1}{3}\frac{z_1^3}{z^3} - \ldots$$

Daher wird, wenn wir $s_h = z_1^h + z_2^h + \ldots + z_n^h$ einführen,

$$\log\frac{F(z)}{z^n} = -s_1 \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{2} s_2 \cdot \frac{1}{z^2} - \ldots - \frac{1}{h} \cdot s_h \cdot \frac{1}{z^h} - \ldots,$$

also:

$$\frac{F(z)}{z^n} = e^{-s_1 \cdot \frac{1}{z}} \cdot e^{-\frac{1}{2} s_2 \cdot \frac{1}{z^2}} \ldots e^{-\frac{1}{h} \cdot s_h \cdot \frac{1}{z^h}} \ldots$$

Mithin erscheint $\frac{F(z)}{z^n}$ als Produkt folgender Faktoren:

$$1 - \frac{1}{h} \cdot s_h \cdot \frac{1}{z^h} + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{1}{h^2} s_h^2 \frac{1}{z^{2h}} - \frac{1}{\underline{|3}} \frac{1}{h^3} \cdot s_h^3 \cdot \frac{1}{z^{3h}} + \ldots \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

Man erhält also für $\frac{F(z)}{z^n}$ eine nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ geordnete unendliche Reihe. Multipliciren wir mit z^n, so entsteht links eine *ganze* Funktion von z; also muss die unendliche Reihe die Eigenschaft haben, dass sie beim n^{ten} Gliede abbricht, dass also die Koefficienten der Potenzen mit

negativen Exponenten verschwinden. Ordnen wir nach Vollzug der Multiplication, so erhalten wir Gleichung (6).

Diese Herleitung der WARING'schen Formel hat ausser ihrer Kürze und Einfachheit den Vorteil, dass sie eine Methode angibt, die Koefficienten p_i übersichtlich aufzuschreiben.

Da in unserm Falle die Hälfte aller s_h Null ist, so ist die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (7) eine sehr beschränkte. Wir müssen nämlich, um p_i darzustellen, die Zahl i als Zahl h auffassen und aus Zahlen h durch Addition zusammensetzen. Es handelt sich hier um Zahlen, die kleiner als λ sind; und wir haben gesehen, dass die Addition solcher Zahlen h, deren Summe auch kleiner als λ ist, immer wieder Zahlen derselben Reihe h ergibt. Zur Bildung eines p_i, dessen zugehöriges s_i *verschwindet*, liefern also *nicht* verschwindende s_h keinen Beitrag. Solche p_i (i eine »nicht passende» Zahl) verschwinden also ebenfalls. Folglich:

In $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$ *ist die eine Hälfte aller Koefficienten der Potenzen von z gleich Null.*

Wenn wir zur Bestimmung der einzelnen Koefficienten übergehen, so erscheint es zweckmässig, die Entwicklung nach steigenden Potenzen von z vorzunehmen. Man findet folgende Ergebnisse:

1. Das von z freie Glied ist λ. Denn setzen wir

$$\varphi(z) = \frac{z^\lambda - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{\lambda-1},$$

so ist

$$\prod_{1}^{\lambda-1}{}_r(\alpha^r - \alpha^{r(\nu+1)}) = \prod_{1}^{\lambda-1}{}_r(1 - \alpha^{r\nu}) = \varphi(1) = \lambda.$$

Für die folgenden Sätze geben wir den Beweis an späterer Stelle.

Man bilde den *numerus socius* von ν, nämlich μ mit der Eigenschaft:

$$\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Dann wird

2. Der Koefficient von z in $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$

$$\lambda \frac{\lambda - 2\mu - 1}{2}.$$

3. Der Koefficient von z^2 in $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$ ist entweder

$$\lambda\frac{(\lambda-3\mu-1)(\lambda-3\mu-2)}{2\,.\,3}; \quad \text{wenn nämlich } 2\mu<\lambda;$$

oder

$$\lambda\frac{(2\lambda-3\mu-1)(2\lambda-3\mu-2)}{2\,.\,3}, \quad \text{wenn } 2\mu>\lambda.$$

4. Der Koefficient von z^3 in $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$ ist

(a) $$\lambda\frac{(\lambda-4\mu-1)(\lambda-4\mu-2)(\lambda-4\mu-3)}{2\,.\,3\,.\,4}, \quad \text{wenn } 2\mu<\lambda, \quad 3\mu<\lambda.$$

(b) $$\lambda\frac{(\lambda-4\mu-1)(\lambda-4\mu-2)(\lambda-4\mu-3)}{2\,.\,3\,.\,4}+\lambda^2\frac{(\lambda-3\mu-1)(\lambda-3\mu-2)}{2\,.\,3},$$
$$\text{wenn } 2\mu<\lambda, \quad 3\mu>\lambda.$$

(c) $$\lambda\frac{(2\lambda-4\mu-1)(2\lambda-4\mu-2)(2\lambda-4\mu-3)}{2\,.\,3\,.\,4}+\lambda^2\frac{(\lambda-2\mu-1)^2}{8},$$
$$\text{wenn } 2\mu>\lambda, \quad 3\mu<2\lambda.$$

(d) $$\lambda\frac{(3\lambda-4\mu-1)(3\lambda-4\mu-2)(3\lambda-4\mu-3)}{2\,.\,3\,.\,4}, \quad \text{wenn } 2\mu>\lambda, \quad 3\mu>2\lambda.$$

Aus diesen Werten erkennt man deutlich den Charakter der zu erwartenden Resultate.

§ 3.

Es ist

$$N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) = N(z\alpha^{-\nu-1}+\alpha^{-\nu}-1)$$
$$= N(z\alpha^{\nu+1}+\alpha^{\nu}-1) = N(1-\alpha^{\nu}-\alpha^{\nu+1}.z).$$

Ersetzen wir jetzt die Einheit durch x und bilden:

$$N(x-\alpha^{\nu}-\alpha^{\nu+1}.z).$$

Zu diesem Zwecke müssen wir wieder die Potenzsummen der Wurzeln bilden und dann nach WARING's Formel verfahren. Es ist hier

$$s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r(\alpha^{\nu r}+\alpha^{(\nu+1)r}z)^h.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatze

$$F(\alpha) = (\alpha^{\nu} + \alpha^{\nu+1}.z)^h,$$

so wird das allgemeine Glied:

$$\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots k}.\alpha^{\nu h+k}.z^k.$$

Wie wir in Gleichung (1) gesehen haben, kommt es auf die Bestimmung desjenigen k an, welches bewirkt, dass $\nu h + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$ wird. Wir haben schon oben μ durch die Kongruenz eingeführt:

$$(8) \qquad \mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Es wird also k so zu bestimmen sein, dass die Kongruenz stattfindet:

$$(9) \qquad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Zugleich muss $h > k$ sein. Damit sind wir denn auf diejenige Norm geführt, in welcher ν durch μ ersetzt ist, nämlich auf $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$. Nun ist nach Gleichung (1)

$$s_h = \sum_1^{\lambda-1}{}_r(\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h = \lambda\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots k}z^k - (1+z)^h.$$

Hier bedeuten h, k die zur Norm $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ gehörigen Zahlenpaare. Wenn man nun z durch $-z$ ersetzt und beiderseits mit $(-1)^h$ multiplicirt, so erhält man:

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h = (-1)^{h+k}.\lambda\frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{1.2\ldots k}z^k - (-1+z)^h,$$

oder mit Erinnerung an Formel (3)

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h + (-1+z)^h = z^k\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h.$$

Wenn nun nach der Waring'schen Formel aus den Potenzsummen

$$\sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h$$

die Gleichung gebildet wird, so erhält man $N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1})$, welches etwa die Form haben möge:

$$N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = x^{\lambda-1} + q_1 x^{\lambda-2} + q_2 x^{\lambda-3} + \ldots + q_{\lambda-1},$$

oder wie wir von jetzt ab immer schreiben werden:

$$(10) \qquad N(x + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = x^{\lambda-1} + \Sigma q_h x^{\lambda-h-1};$$

wenn aber aus den Potenzsummen $z^k \Sigma(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h$ die Gleichung gebildet wird, so kommt zu jedem q_h noch der Multiplikator z^k hinzu. Dies ist zweifellos, wenn q_h *nur* von s_h einen Beitrag erhält. Ist dagegen h auch aus kleineren h durch Addition zusammengesetzt, so muss man sich erinnern, dass dann die Summe der zusammensetzenden h die Summe der entsprechenden k als k besitzt. Wir haben nun:

$$(11) \qquad \sum_1^{\lambda-1}{}_r(-\alpha^{\nu r} + \alpha^{(\nu+1)r}.z)^h + (-1 + z)^h = 0^h + z^k \sum_1^{\lambda-1}(-\alpha^r + \alpha^{r(\mu+1)})^h.$$

Links und rechts befinden sich λ Summanden und deren 1te, 2te, ..., $\lambda - 1^{te}$ Potenzsummen stimmen überein. Bilden wir also nach WARING's Formel die zu beiden gehörenden Gleichungen, wobei wir auf der rechten Seite jedem q_h den Faktor z^k beifügen müssen, so entsteht eine Identität. Selbstverständlich muss dafür gesorgt werden, dass eine Wurzel der links entstehenden Gleichung Null sei. Wir erhalten dann links die Grösse:

$$(x - z + 1)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) - (1 - z)N(\alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z)$$

oder mit Erinnerung an die Funktion $\varphi(z)$, Seite 63:

$$(x + 1 - z)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - 1.$$

Daher die Identität:

$$(12) \qquad (x + 1 - z)N(x + \alpha^\nu - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - 1 = x^\lambda + \Sigma q_h x^{\lambda-h} z^k,$$

$$[\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}, \quad h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}, \quad h > k].$$

Zu $h = \lambda - 1$ gehört $k = \nu$; denn $\lambda - 1 + \mu\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ und $\lambda - 1 > \nu$. Ersetzen wir noch z und x durch $\frac{z}{y}$ und $\frac{x}{y}$, so wird:

$$(13) \quad (x + y - z)N(x + \alpha^\nu y - \alpha^{\nu+1}.z) + z^\lambda - y^\lambda - x^\lambda = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^k.$$

Die Summation erstreckt sich auf alle Wertepaare h, k, welche den Bedingungen genügen:

(14) $\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}$, $h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$, $h < \lambda$.

Die Gleichung (13) *enthält ein Hauptresultat unserer Untersuchungen.*

Ersetzen wir noch α durch α^μ, so wird

(15) $$(x + y - z)N(x + \alpha y - \alpha^{\mu+1}.z) + z^\lambda - y^\lambda - x^\lambda = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^k.$$

Die q_h sind durch die Gleichung definirt:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma q_h z^{\lambda-1-h}.$$

Ist bei den Summen nichts anderes ausdrücklich bemerkt, so gelten immer die Bedingungen (14). Da sämtliche q_h den Faktor λ enthalten, so kann man ihn abtrennen und die arithmetische Form $F(x, y, z)$ λ^{ter} Ordnung mit drei Variablen durch die Gleichung definiren:

(16) $$\lambda.F(x, y, z) = \Sigma q_h x^{\lambda-h}.y^{h-k}.z^k.$$

§ 4.

Nehmen wir in Gleichung (12) $x = -1$, so wird, wenn man zugleich z durch $-z$ ersetzt,

(17) $$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma(-1)^{h+k+1}.q_h.z^{k-1}.$$

Anderseits ist:

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma p_h z^{\lambda-h-1},$$

$$h + k\nu \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h > k.$$

Die vorige Summe erstreckte sich auf die h, k, welche den Bedingungen genügen $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$. Nun ist aber

$$\lambda - k + \nu(\lambda - h) \equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad \lambda - k > \lambda - h,$$

sobald $h + k\mu \equiv 0$, $h > k$ ist. Daher kann man die letzte Summe auch so schreiben:

$$(18) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma p_{\lambda-k} . z^{k-1},$$

$$(h + k\mu \equiv 0, \quad h > k).$$

Demnach erhält man:

$$(19) \qquad p_{\lambda-k} = (-1)^{h+k+1} . q_h .$$

Dies ist ein zweites Hauptresultat. Es wird später *für die praktische Berechnung der q* von hervorragender Bedeutung sein.

Nehmen wir in (12) $x = z$, so wird

$$N(z + \alpha^{\nu} - \alpha^{\nu+1} . z) = 1 + \Sigma q_h z^{\lambda-h+k}.$$

Also

$$N\left(1 + \alpha^{\nu} . \frac{1}{z} - \alpha^{\nu+1}\right) = N\left(\frac{1}{z} + \alpha - \alpha^{\lambda-\mu}\right) = z^{-\lambda+1} + \Sigma q_h z^{-h+k+1},$$

oder:

$$(20) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\mu}) = z^{\lambda-1} + \Sigma q_h z^{h-k-1}.$$

Auch hieraus kann man eine der Gleichung (19) analoge ableiten. Die dabei auftretende ist aber praktisch von geringerem Nutzen als (19). Sei nun

$$(21) \qquad (\mu + 1)\xi \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Dann ist $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = N(z + \alpha^{\xi} - \alpha)$. Also nach leichten Umformungen:

$$(22) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\xi}) = z^{\lambda-1} + \Sigma(-1)^h . q_h . z^{\lambda-1-h}.$$

Durch ähnliche Schlüsse finden wir, da

$$(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$(\nu + 1)(\lambda - \xi + 1) \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

$$(23) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\nu}) = z^{\lambda-1} + \Sigma(-1)^{h-k+1} q_h . z^{h-k-1}$$

$$(24) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\lambda-\xi+1}) = z^{\lambda-1} + \Sigma(-1)^h q_h . z^{k-1}.$$

Die 6 *Normen* $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\xi})$, $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1})$ *sind auf einander zurückführbar* und können in *einer* Berechnung gefunden werden. Wollte man jede selbständig durch Zahlenpaare h, k und WARING's Formel bilden, so würde man finden:

1. $N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1})$ gehört an das Paar h, k; d. h.

$$h+\mu k\equiv 0 \pmod{\lambda}, \qquad h>k.$$

2. $N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1})$ gehört an $\lambda-k$, $\lambda-h$,

weil $\lambda-k+\nu(\lambda-h)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-k>\lambda-h$.

3. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu})$ gehört an $\lambda-h+k$, k,

weil $\lambda-h+k+(\lambda-\mu-1)k\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-h+k>k$.

4. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu})$ gehört an $\lambda-h+k$, $\lambda-h$,

weil $\lambda-h+k+(\lambda-\nu-1)(\lambda-h)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-h+k>\lambda-h$.

5. $N(z+\alpha-\alpha^{\xi})$ gehört an h, $h-k$,

weil $h+(\xi-1)(h-k)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $h>h-k$.

6. $N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1})$ gehört an $\lambda-k$, $h-k$,

weil $\lambda-k+(\lambda-\xi)(h-k)\equiv 0 \pmod{\lambda}$

und $\lambda-k>h-k$.

Stellen wir ferner die Gleichungen zusammen, welche die Beziehungen der 6 Funktionen ausdrücken.

$$(25)\quad \left|\begin{array}{lll} 1. & N(z+\alpha-\alpha^{\mu+1}) & = z^{\lambda-1}+\Sigma q_h z^{\lambda-1-h}, \\ 2. & N(z+\alpha-\alpha^{\nu+1}) & = z^{\lambda-1}+\Sigma(-1)^{h+k+1} q_h \cdot z^{k-1}, \\ 3. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\mu}) & = z^{\lambda-1}+\Sigma q_h z^{h-k-1}, \\ 4. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\nu}) & = z^{\lambda-1}+\Sigma(-1)^{h+k+1} \cdot q_h \cdot z^{h-k-1}, \\ 5. & N(z+\alpha-\alpha^{\xi}) & = z^{\lambda-1}+\Sigma(-1)^{h} q_h \cdot z^{\lambda-h-1}, \\ 6. & N(z+\alpha-\alpha^{\lambda-\xi+1}) & = z^{\lambda-1}+\Sigma(-1)^{h} q_h \cdot z^{k-1}. \end{array}\right.$$

Dabei ist

$$(26)\qquad \mu\nu\equiv 1, \qquad (\mu+1)\xi\equiv 1, \qquad (\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\equiv 1,$$
$$(\nu+1)(\lambda-\xi+1)\equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Zahlenbeispiel. $\lambda = 11,\ \mu = 2,\ \nu = 6,\ \xi = 4.$

$$1.\quad \left.\begin{array}{r} h = 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ k = 3,\ 2,\ 7,\ 1,\ 6 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{3});$$

$$2.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-k = 8,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5 \\ \lambda-h = 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{7});$$

$$3.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-h+k = 9,\ 6,\ 10,\ 3,\ 7 \\ k = 3,\ 2,\ 7,\ 1,\ 6 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{9});$$

$$4.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-h+k = 9,\ 6,\ 10,\ 3,\ 7 \\ \lambda-h = 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{5});$$

$$5.\quad \left.\begin{array}{r} h = 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ h-k = 2,\ 5,\ 1,\ 8,\ 4 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{4});$$

$$6.\quad \left.\begin{array}{r} \lambda-k = 8,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5 \\ h-k = 2,\ 5,\ 1,\ 8,\ 4 \end{array}\right\} \text{ zu } N(z+\alpha-\alpha^{8}).$$

$$q_5 = -2.11, \qquad q_7 = 3.11, \qquad q_8 = 1.11, \qquad q_9 = -1.11,$$
$$q_{10} = 1.11.$$

Daher hat man die Normen: ($\alpha^{11} = 1$)

$$N(z + \alpha - \alpha^3) = z^{10} + 11(-2z^5 + 3z^3 + z^2 - z + 1),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^7) = z^{10} + 11(2z^2 + 3z + z^6 + 1 - z^5),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^9) = z^{10} + 11(-2z + 3z^4 + 1 - z^7 + z^3),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^5) = z^{10} + 11(2z + 3z^4 + 1 + z^7 - z^3),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^4) = z^{10} + 11(2z^5 - 3z^3 + z^2 + z + 1),$$
$$N(z + \alpha - \alpha^8) = z^{10} + 11(2z^2 - 3z + z^6 + 1 + z^5).$$

§ 5.

Wir wollen jetzt über die *Anzahl* der *verschiedenen,* nicht auf einander zurückführbaren *komplexen Zahlen von der Form* $z + \alpha - \alpha^{\mu+1}$ einige Untersuchungen durchführen.

Für $\mu = 1$ wird $\nu = 1$; ferner $\lambda - \nu = \lambda - \mu = \lambda - 1$ und

$$\xi = \lambda - \xi + 1 = \frac{\lambda + 1}{2}.$$

Die drei Zahlen $z + \alpha - \alpha^2$, $z + \alpha - \alpha^{\lambda-1}$, $z + \alpha - \alpha^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}$ bilden eine *dreig*liedrige Gruppe mit Normen, die in *einer* Berechnung gefunden werden. Dabei ist bemerkenswert, dass $1 - \alpha - \alpha^{-1}$ immer eine komplexe Einheit ist. Denn (vergl. Kronecker, *de unitatibus complexis,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 23) es ist

$$1 - \alpha + \alpha^2 = \frac{1 + \alpha^3}{1 + \alpha}.$$

Es ist also $N(z + \alpha - \alpha^2) = 1$ für $z = -1$, oder $\sum(-1)^h q_h = 0$, wenn $h + k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $h > k$. Daraus ergibt sich die interessante Gleichung:

$$(27) \qquad 1 + \sum(-1)^{k+1} \frac{(\lambda - k - 1)(\lambda - k - 2)\ldots(\lambda - 2k + 1)}{2.3\ldots k} = 0. \qquad \left(k = 2, 3, 4, \ldots, \frac{\lambda - 1}{2}\right)$$

So ist für $\lambda = 11$ und $\lambda = 13$ bezüglich

$$1 - 4 + 7 - 5 + 1 = 0; \qquad 1 - 5 + 12 - 14 + 7 - 1 = 0.$$

Scheiden wir die dreigliedrige Gruppe aus, so bleiben für λ von der Form $\lambda = 6k + 5$ in der Reihe $2, 3, \ldots, \lambda - 1$ noch $6k$ Zahlen übrig. Wir erhalten also $N(z + \alpha - \alpha^2)$, welches 3 Normen vertritt und ausserdem $6k$ Normen, die in k Gruppen zerfallen. Im ganzen finden wir also $\frac{\lambda + 1}{6}$ Gruppen. Die eine enthält 3, jede der übrigen 6 verschiedene Normen. Für $\lambda = 6k + 1$ dagegen ist eine Zahl δ angebbar, so dass $\delta^2 + \delta + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$. Dann wird für $\mu = \delta$, $\nu = \delta^2$, $\lambda - \mu = \delta^2 + 1$, $\lambda - \nu = \delta + 1$, $\xi = \lambda - \delta$, $\lambda - \xi + 1 = \delta + 1$. Folglich erhalten wir nur *zwei* verschiedene Normen in dieser Gruppe, nämlich $N(z + \alpha - \alpha^{\delta+1})$ und $N(z + \alpha - \alpha^{\delta^2+1})$. Hier erhalten wir also im ganzen $\frac{\lambda + 5}{6}$ Normengruppen. Die eine enthält 3, eine zweite 2, die übrigen je 6 Normen.

Mit dieser Gruppirung der Normen trinomischer komplexer Zahlen befindet sich die Gruppirung der JACOBI'schen $\psi(\alpha)$ in vollkommenster Übereinstimmung. Man vergleiche meinen kleinen Aufsatz im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 337.

An dieser Stelle wollen wir noch einige Bemerkungen über die q_h beifügen.

1. Sie haben sämtlich den Faktor λ, weil alle s_h den Faktor λ haben.

2. Die Kongruenz $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$ liefert für $k = 1$ den Wert $h = \lambda - \mu$. Daraus folgt $s_{\lambda-\mu} = (-1)^{\lambda-\mu+1} . \lambda(\lambda - \mu)$. Und da h nicht aus kleineren h zusammengesetzt ist, weil $k = 1$, so folgt

$$q_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1} . \lambda; \tag{28}$$

Gleichung (19) liefert daher $p_{\lambda-1} = \lambda$. In allen diesen Normen ist also, wie wir schon oben feststellen konnten, das von z freie Glied λ. Wie Gleichung (25 n° 5) zeigt, ist in $N(z + \alpha - \alpha^{\xi})$ der Koefficient von $z^{\mu-1}$ ebenfalls $(-1)^h q_{\lambda-\mu}$ also gleich λ. Und nun ist in $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ der Koefficient von $z^{\xi-2}$ ebenfalls λ, da wir nur ξ mit $\mu + 1$ zu vertauschen haben, um $N(z + \alpha - \alpha^{\xi})$ in $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ überzuführen. Also:

In $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ erscheint unter den Koefficienten q_h dreimal der Wert λ. Der Koefficient von $z^{\mu-1}$ ist $(-1)^{\mu-1}\lambda$; der Koefficient von $z^{\xi-2}$ und das von z freie Glied sind λ. In $N(z + \alpha - \alpha^2)$ tritt λ nur *zweimal* auf.

3. Ähnliche Schlüsse gelten für $k = 2$. Die Kongruenz $h + k\mu \equiv 0 \pmod{\lambda}$

liefert $h = \lambda - 2\mu$, wenn $2\mu < \lambda$ oder $h = 2\lambda - 2\mu$, wenn $2\mu > \lambda$. Ist $\lambda - 2\mu < 2$, also $\lambda = 2\mu + 1$, so fehlt das betreffende Glied, also ist $q_h = 0$. Im Falle $h = \lambda - 2\mu$ ist für Gleichung (7) nur *eine* Auflösung vorhanden, also h nicht zusammensetzbar aus kleineren h. Demnach ergibt sich unmittelbar q_h aus s_h. Im Falle $h = 2\lambda - 2\mu$, $2\mu > \lambda$ ist für (7) eine zweite Auflösung vorhanden, nämlich $\lambda - \mu + \lambda - \mu = 2\lambda - 2\mu$. Die WARING'sche Formel ist also in diesem Falle zweigliedrig, aber die Ausrechnung ergibt dasselbe Resultat wie im ersten Falle. Wir haben das Resultat schon zu Ende des § 2 mitgeteilt. Die übrigen dort gegebenen Werte findet man durch Betrachtung der Fälle $k = 3, 4$.

§ 6.

Wir wollen jetzt in einigen einfachen Fällen $\mu = 1, 2, 3$ *die Normen als Reihen darstellen* und eine allgemein gültige Entwicklung geben.

Nach unsern Bezeichnungen ist $\mu\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}$, und wir dürfen $\nu > \mu$ voraussetzen. Denn die Fälle $\mu = 1$, $\nu = 1$; $\mu = \lambda - 1$, $\nu = \lambda - 1$ oder $\mu = \nu$ werden in besonderer Betrachtung erledigt. Die Kongruenz $h + \mu k \equiv 0 \pmod{\lambda}$ kann durch folgende Gleichungen ersetzt werden:

$$\left.\begin{array}{l} h + \mu k = 1\lambda \\ h + \mu k = 2\lambda \\ \dots\dots\dots\dots \\ h + \mu k = \mu\lambda \end{array}\right| \qquad (h > k)$$

Man hat also für die r^{te} Reihe $h = r\lambda - \mu k$, und da $h > k$, so folgt $(\mu + 1)k < r\lambda$. Anderseits ist $h < \lambda$, also $\mu k > (r - 1)\lambda$. Wir erhalten also für die k der r^{ten} Gruppe die Grenzen

$$(29) \qquad \frac{r\lambda}{\mu + 1} > k > \frac{(r - 1)\lambda}{\mu}.$$

Betrachten wir nun die erste Gruppe genauer. Seien h_1, k_1 und h_2, k_2 zwei derselben angehörende Paare, so ist $h_1 + h_2 + \mu(k_1 + k_2) = 2\lambda$. Also gehört $h_1 + h_2$ entweder der *zweiten* Gruppe an oder es ist *nicht vorhanden*. Letzteres würde für $h_1 + h_2 > \lambda$ stattfinden. Hieraus folgt,

dass die h der ersten Gruppe nicht aus kleineren h als Summanden zusammengesetzt sein können. Mithin gelingt für die erste Gruppe unmittelbar die Bildung von q_h aus s_h. Durch Anwendung von (3) schliessen wir daher sofort: In $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ kommt eine Reihe von Gliedern F_1 vor, welche gegeben sind durch die Gleichung:

$$F_1 = \lambda(-1)^{\mu+1} z^{\mu-1} + \lambda \sum\nolimits_k (-1)^{(\mu+1)k} \frac{(\lambda-\mu k-1)(\lambda-\mu k-2)\dots(\mu k-k+1)}{2.3\dots k} z^{\mu k-1}.$$

$$k = 2,\ 3,\ \dots,\ E\left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right).$$

Für die zweite Gruppe könnten wir zwar einen ähnlichen Ausdruck bilden; aber sie wird von Gliedern der ersten Gruppe beeinflusst und zwar nicht in einfach angebbarer Weise. Dieses Ziel erreichen wir durch eine andere Gruppirung folgendermassen. Wir beweisen leicht aus (29)

$$(30)\qquad \frac{(\mu-r+1)\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{(\mu-r+1)\lambda}{\mu+1}.$$

Daraus entstehen folgende Gruppen:

$$(31)\qquad \left|\begin{array}{l} \frac{\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{\lambda}{\mu+1}, \\ \frac{2\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{2\lambda}{\mu+1}, \\ \frac{3\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{3\lambda}{\mu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\mu\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{\mu\lambda}{\mu+1}. \end{array}\right.$$

Diese Gruppen haben nun die Eigenschaft, dass immer zwei Zahlen $\lambda - k$ der s^{ten} und t^{ten} Reihe in ihrer Summe eine Zahl der $(s+t)^{\text{ten}}$ Reihe ergeben. Man addire nur die s^{te} und t^{te} Ungleichung. Die $\lambda - k$ als Zahlen h liefern aber, wie wir in § 4 gesehen haben, $N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1})$. Bilden wir also:

$$\varphi_r = \lambda \sum (-1)^{h+k+1} . \frac{1}{\lambda-k} \frac{(\lambda-k)(\lambda-k-1)\dots(h-k+1)}{1.2\dots(\lambda-h)} . z^{-\lambda+k},$$

$$\frac{r\lambda}{\mu} > \lambda - k > \frac{r\lambda}{\mu+1}; \qquad h + \mu k = (\mu - r + 1)\lambda;$$

so wird

$$\frac{N(z + a - a^{\nu+1})}{z^{\lambda-1}} = e^{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_\mu + \frac{1}{z^\lambda} \cdot R},$$

wo R aus dem zu Anfang des § 2 Gesagten als eine unendliche für unser Resultat unwesentliche Reihe klar ist. Daher ist

$$N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + z^{\lambda-1} \cdot \varphi_1 + z^{\lambda-1}\left(\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1^2\right)$$

$$+ z^{\lambda-1}\left(\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2 + \frac{1}{6}\varphi_1^3\right) + \dots.$$

Die Klammern umschliessen Glieder, deren Zahlen $\lambda - k$ von 2-, 3-, ...-facher Zusammensetzung sind aus kleineren Zahlen $\lambda - k$. Die umständlichste Rechnung würden die Glieder μ-facher Zusammensetzung erfordern. Aber für diese Glieder wenden wir Formel (19) an und erhalten sie so unmittelbar. Daher gelangen wir zu folgendem Schlussergebniss.

»Man bilde:

$$\varphi_r = \lambda \sum (-1)^{h+k+1} \cdot \frac{1}{h} \frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot z^{-h}, \qquad r = 1, 2, \dots, \mu - 1)$$

$$\frac{r\lambda}{\mu} > h > \frac{r\lambda}{\mu + 1}; \qquad k = \lambda r - \mu h;$$

$$f_1 = \lambda \sum \frac{1}{h} \frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} z^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, E\left(\frac{\lambda}{\mu + 1}\right); \qquad h = \lambda - \mu k.$$

Dann ist:

$$(32) \qquad N(z + \alpha - \alpha^{\nu+1}) = z^{\lambda-1} + f_1 + z^{\lambda-1} \cdot \varphi_1 + z^{\lambda-1}\left(\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1^2\right)$$

$$+ z^{\lambda-1}\left(\varphi_3 + \varphi_2\varphi_1 + \frac{1}{6}\varphi_1^3\right) + z^{\lambda-1}\left(\varphi_4 + \varphi_3\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1^2 + \frac{1}{24}\varphi_1^4\right) + \dots«$$

Als Beispiele teilen wir die Gleichungen mit:

$$N(z + \alpha - \alpha^2) = z^{\lambda-1} + \lambda + \lambda\sum \frac{(\lambda - k - 1)\dots(\lambda - 2k + 1)}{2\dots k} z^{k-1},$$

$$k = 2,\ 3,\ \dots,\ \frac{\lambda - 1}{2}.$$

$$N(z + \alpha - \alpha^3) = z^{\lambda-1} - \lambda z + \lambda\sum_{2}^{2n}{}_k \frac{(\lambda - 2k - 1)\dots(\lambda - 3k + 1)}{2\dots k}.(-1)^k.z^{2k-1}$$

$$+ \lambda z^{2n-2} + \lambda\sum_{2}^{n}{}_k \frac{(2n + k - 1)\dots(3k)}{2\dots(2n + 1 - 2k)} z^{2n-2k},$$

wenn $\lambda = 6n + 1$.

$$N(z + \alpha - \alpha^3) = z^{\lambda-1} - \lambda z + \sum_{2}^{2n+1}{}_k \frac{(\lambda - 2k - 1)\dots(\lambda - 3k + 1)}{2\dots k}(-1)^k.z^{2k-1}$$

$$+ \lambda z^{2n} + \lambda\sum_{2}^{n}{}_k \frac{(2n + k)\dots(3k - 1)}{2\dots(2n - 2k + 3)}.z^{2n-2k+2},$$

wenn $\lambda = 6n + 5$.

Für $\mu = 3$, $\lambda = 12n + 1$ erhalten wir:

$$N(z + \alpha - \alpha^4) = z^{\lambda-1} + \lambda(f_1 + \varphi_1 + \Psi).$$

Hier ist:

$$f_1 = z^2 + \frac{\lambda - 7}{2}.z^5 + \frac{(\lambda - 10)(\lambda - 11)}{2.3} z^8 + \frac{(\lambda - 13)(\lambda - 14)(\lambda - 15)}{2.3.4}.z^{11} + \dots$$

$$\varphi_1 = \lambda + \frac{(4n - 2)(4n - 3)(4n - 4)}{2.3.4} z^3 + \frac{(4n - 3)\dots(4n - 8)}{2\dots 7} z^6$$

$$+ \frac{(4n - 4)\dots(4n - 12)}{2\dots 10} z^9 + \dots$$

$$\Psi = -(2n + 1)z + \frac{(2n - 1)(16n^3 + 80n^2 - 21n - 30)}{15} z^4 + \dots$$

Die Reihe Ψ enthält die *zweifach* zusammengesetzten q_h. Das Bildungsgesetz ist nicht erkennbar, und darum thut man wohl, an der Reihe (32) festzuhalten.

§ 7.

Eine andere Methode zur Berechnung der q_h ergibt sich folgendermassen.

Wenn man in Gleichung (15) $z = x + y$ setzt, so wird:

$$(x + y)^\lambda = x^\lambda + y^\lambda + \sum q_h x^{\lambda - h} . y^{h-k} . (x + y)^k.$$

Nehmen wir also $y = 1$, so erhalten wir die einfache Gleichung:

$$(x + 1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \sum q_h x^{\lambda - h} (x + 1)^k. \tag{33}$$

Entwickeln wir nun rechts und links nach Potenzen von x, so erhalten wir Rekursionsformeln von der Gestalt:

$$q_{\lambda-1} = \lambda,$$

$$q_{\lambda-2} + k_1 . q_{\lambda-1} = \lambda \frac{\lambda - 1}{2},$$

$$q_{\lambda-3} + k_2 . q_{\lambda-2} + \frac{k_1(k_1 - 1)}{1 . 2} q_{\lambda-1} = \lambda \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 . 3},$$

. . . .

Hier bedeutet k_r das zu $h = \lambda - r$ gehörige k, so dass

$$r \equiv \mu k_r, \qquad k_r \equiv \nu r \pmod{\lambda}.$$

So wird also $k_1 = \nu$; $k_2 = 2\nu$ oder $= 2\nu - \lambda$; $k_3 = 3\nu$ oder $= 3\nu - \lambda$ oder $= 3\nu - 2\lambda$; u. s. w.

Hiernach lassen sich die Resultate des § 2 wohl am einfachsten ableiten. Vergleichen wir die *höchsten* Exponenten, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$q_{h_1} = \lambda,$$

$$q_{h_2} + k_1 . q_{h_1} = \lambda \frac{\lambda - 1}{2},$$

$$q_{h_3} + k_2 . q_{h_2} + \frac{k_1(k_1 - 1)}{1 . 2} q_{h_1} = \lambda \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}{2 . 3},$$

. . . .

Hier bedeutet k_r das zu h_r gehörende k und gehorcht der Kongruenz

$$k_r \equiv -\xi r \pmod{\lambda},$$

so dass $k_1 = \lambda - \xi$; $k_2 = \lambda - 2\xi$ oder $= 2\lambda - 2\xi$ ist; u. s. w.

Man kann auch die Gleichung erhalten

$$(34) \qquad (x+1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma(-1)^h . x^k . (x+1)^{h-k}.$$

Dann erhält man ein ähnliches System von Rekursionsformeln. Die erste wird

$$q_{\lambda-\mu} = (-1)^{\mu+1} . \lambda.$$

Man sieht, dass so von *drei* Seiten her der Zugang zu den q_h eröffnet ist. Und dadurch erhält unsere Methode den Charakter vollkommenen Abschlusses; denn der Wert λ tritt unter den q_h im allgemeinen an *drei* Stellen auf.

Da $\lambda - h$ entweder gleich μk oder gleich $\mu k - g\lambda$ ist, wo g eine ganze Zahl bedeutet, so haben wir noch

$$(x+1)^\lambda = x^\lambda + 1 + \Sigma q_h x^{-g\lambda}(x^{\mu+1} + x^\mu)^k,$$

oder, wenn wir x durch α ersetzen,

$$(35) \qquad (\alpha+1)^\lambda = 2 + \Sigma q_h (\alpha^{\mu+1} + \alpha^\mu)^k.$$

Da die Gleichung $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades, welche α bestimmt, irreduktibel ist, so kann man auch aus der letzten Formel eine Methode ableiten, welche die Werte der q_h finden lässt.

§ 8.

Wir wollen jetzt *einige weitere Eigenschaften unserer Normen* aufzählen.

Vertauscht man z mit $-z$, so führt Gleichung (15) zu nachstehender Beziehung:

$$(36) \qquad (x+y+z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\mu+1}) - x^\lambda - y^\lambda - z^\lambda$$
$$= \Sigma(-1)^k . q_h . x^{\lambda-h} . y^{h-k} . z^k.$$

Analog erhält man durch Vertauschung von α mit α^{ξ} und y mit z

(37) $$(x + y + z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\xi}) - x^{\lambda} - y^{\lambda} - z^{\lambda}$$
$$= \Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{\lambda-h}.y^{k}.z^{h-k}.$$

Andere Formeln erhält man ohne Mühe in ähnlicher Weise und zwar

(38) $$(x + y + z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\nu+1}) - x^{\lambda} - y^{\lambda} - z^{\lambda}$$
$$= \Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{k}.y^{h-k}.z^{\lambda-h},$$

(39) $$(x + y + z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\lambda-\xi+1}) - x^{\lambda} - y^{\lambda} - z^{\lambda}$$
$$= \Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{k}.y^{\lambda-h}.z^{h-k},$$

(40) $$(x + y + z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\lambda-\mu}) - x^{\lambda} - y^{\lambda} - z^{\lambda}$$
$$= \Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{h-k}.y^{\lambda-h}.z^{k},$$

(41) $$(x + y + z)N(x + y\alpha + z\alpha^{\lambda-\nu}) - x^{\lambda} - y^{\lambda} - z^{\lambda}$$
$$= \Sigma(-1)^{k}.q_{h}.x^{h-k}.y^{k}.z^{\lambda-h}.$$

Nehmen wir $x = y = z = 1$, so erhalten wir aus einer dieser 6 Formeln

(42) $$3N(1 + \alpha + \alpha^{\mu+1}) = 3 + \Sigma(-1)^{k}.q_{h}.$$

Es ist also $\Sigma(-1)^{k}.q_{h}$ *immer durch* 3 *teilbar.*

So ist für $\lambda = 11$, $\mu = 2$

$$\Sigma(-1)^{k}.q_{h} = 11(2 + 3 - 1 + 1 + 1) = 6.11.$$

Diese Bemerkung ist als Rechnungsprobe nicht ohne Wert.

Die Gleichung (42) zeigt, dass die 6 Normen, welche links entstehen, wenn man für $\mu + 1$ die Werte $\nu + 1$, ξ, $\lambda - \mu$, $\lambda - \nu$, $\lambda - \xi + 1$ setzt, *identisch* sind. Man bestätigt dies auch durch unmittelbare Betrachtung der komplexen Zahl $1 + \alpha + \alpha^{\mu+1}$ ohne Mühe. Und hierin liegt vielleicht ein Hinweis, wie unsere Untersuchungen über die *trinomischen* Zahlen hinaus verallgemeinert werden könnten.

Für $N(\alpha + \alpha^{\delta} + \alpha^{\delta^2})$, wenn $\delta^3 \equiv 1 \pmod{\lambda}$ erhalten wir nur $\frac{\lambda - 1}{3}$

verschiedene Faktoren. Denn $\alpha + \alpha^{\partial} + \alpha^{\partial^2}$ ist eine *Periode* der Kreisteilungsgleichungen. Bildet man also nach unserem Verfahren die Norm $N(1 + \alpha^{\partial-1} + \alpha^{\partial^2-1}) = N(1 + \alpha + \alpha^{\partial+1})$, *so erhält man einen vollständigen Kubus*. So ist für $\alpha^{31} = 1$, $N(1 + \alpha + \alpha^6) = 5^6$. Ist $\mu = \partial$, so ist auch $\lambda - \nu = \partial + 1$, $\lambda - \xi + 1 = \partial + 1$, wie wir § 5 gefunden haben. Daher erhalten wir aus (25) drei Identitäten, welche uns zeigen:

$$q_h = (-1)^{h+k+1} \cdot q_{\lambda-h+k} = (-1)^h \cdot q_{\lambda-k},$$

falls $h + \partial k \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $\partial^2 + \partial + 1 \equiv 0 \pmod{\lambda}$.

So wird für $\lambda = 31$, $\partial = 5$:

$$\begin{aligned} q_6 &= q_{30} = q_{26} = 31 \cdot 1, \\ q_{11} &= q_{24} = -q_{27} = 31 \cdot 30, \\ q_{12} &= -q_{29} = q_{21} = 31 \cdot 10, \\ q_{16} &= q_{18} = q_{28} = 31 \cdot 35, \\ q_{17} &= -q_{23} = -q_{22} = -31 \cdot 500. \end{aligned}$$

Die dreimalige Wiederkehr, welche allgemein *nur für* λ stattfindet, tritt hier bei *jedem* Koefficienten ein.

§ 9.

Es sollen jetzt die Beziehungen der vorliegenden Untersuchungen zu den oben erwähnten Forschungen L. Kronecker's dargelegt werden.

Sei γ eine primitive Wurzel (mod λ), so kann man setzen:

$$\mu \equiv \gamma^m, \qquad \mu + 1 \equiv \gamma^l \pmod{\lambda},$$

oder

$$m = \operatorname{ind} \mu, \qquad l = \operatorname{ind}(\mu + 1).$$

Daraus folgt leicht:

$$-\mu = \operatorname{ind} \nu, \quad l - m = \operatorname{ind}(\nu + 1); \quad \frac{\lambda - 1}{2} + l = \operatorname{ind}(\lambda - \mu - 1),$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} + m = \operatorname{ind}(\lambda - \mu), \qquad \frac{\lambda - 1}{2} + l - m = \operatorname{ind}(\lambda - \nu - 1),$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} - m = \operatorname{ind}(\lambda - \nu); \quad \frac{\lambda - 1}{2} + m - l = \operatorname{ind}(\xi - 1), \quad -l = \operatorname{ind} \xi;$$

$$\frac{\lambda - 1}{2} - l = \operatorname{ind}(\lambda - \xi), \qquad m - l = \operatorname{ind}(\lambda - \xi + 1).$$

Hiernach haben wir 6 Exponentenpaare von γ; und diese 6 Paare sind es, welche durch die komplexe Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m$$

(oder die andern 5 entsprechenden) *die ψ-Funktion*

$$\psi_{\gamma^m} = \psi_n$$

charakterisiren. Genau diese 6 Paare zählt KRONECKER auf. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 93, S. 357.) Während also KRONECKER zeigt, dass die Zahl $1 - \zeta^l + \zeta^m$; $\zeta^{\lambda-1} = 1$ die ψ-Funktion charakterisirt, haben wir die Norm der Zahl $z + \alpha - \alpha^{\gamma^m}$; $\alpha^\lambda = 1$ ins Auge gefasst. (Man beachte den Exponenten m, welcher in γ^m und $\lambda - 1$, welches in λ übergeht.)

Die einfachste Beziehung nun, welche zwischen unserer Zahl λ und der von KRONECKER betrachteten Primzahl n, die wir p nennen wollen, bestehen kann, ist die, dass

$$p = 2\lambda + 1$$

genommen wird. Dann müssen beide Zahlen p und λ von der Form $6n + 5$ sein. Demnach erhalten wir, wenn wir alle Paare m, l bilden, $\frac{p+1}{6}$ nicht auf einander zurückführbare. Formen wir nun $1 + \zeta^m - \zeta^l$ in $1 + (-1)^m \alpha^m - (-1)^l \alpha^l$, wo $\alpha^\lambda = 1$ ist, um, so erhalten wir eine der Zahlen $1 + \alpha - \alpha^{n+1}$ oder $1 + \alpha + \alpha^{n+1}$. Da nun $1 + \gamma^m - \gamma^l \equiv 0 \pmod p$, ($\gamma$ ist hier eine primitive Wurzel der Primzahl p und m und l bestimmen sich durch die Kongruenz $\gamma^l \equiv 1 + \gamma^m \pmod p$) so enthalten die obigen komplexen Zahlen einen oder mehrere Primteiler von p; ihre Norm ist durch p oder eine Potenz von p teilbar. Es gibt also $\frac{p+1}{6}$ solcher Formen trinomischer komplexer Zahlen, welche einen (oder mehrere) Primteiler von p enthalten. Nun führt jede Zahl $1 + \alpha - \alpha^{n+1}$ zu *drei* im allgemeinen verschiedenen Normen, wie (25) zeigt, nämlich:

$$1 + \Sigma q_h, \qquad 1 + \Sigma(-1)^{h+k+1}.q_h, \qquad 1 + \Sigma(-1)^h q_h;$$

ferner führt die Zahl $1 + \alpha + \alpha^{n+1}$ nur zu *einer* Norm

$$1 + \frac{1}{3}\Sigma(-1)^k g_h.$$

Also führen die für λ vorhandenen $\frac{\lambda - 5}{6}$ sechsgliedrigen Gruppen $z + \alpha \pm \alpha^{n+1}$ zu $4 \cdot \frac{\lambda - 5}{6}$ im allgemeinen verschiedenen Normen. Die Form $z + \alpha \pm \alpha^2$ ist auszuschliessen. Ebenso sehen wir von $m = 0$, $l = 1$, welches zur Form $2 - \zeta$ führt, ab und erhalten also nur $\frac{p-5}{6}$ Zahlen, deren Normen durch p teilbar sind. Mithin sind unter den überhaupt für unsere Frage vorhandenen $\frac{4\lambda - 20}{6}$ Normen $\frac{2\lambda - 4}{6}$ oder in runder Zahl die Hälfte durch p teilbar.

Ist $p = 2\lambda + 1$ und p und λ jedes Primzahl, so ist die Hälfte aller nicht auf einander zurückführbaren Normen $N(1 + \alpha \pm \alpha^{n+1})$; $\alpha^\lambda = 1$ durch p teilbar.

Merkwürdiger Weise haben die Zahlen $p = 2\lambda + 1$ des ersten Hundert alle die Eigenschaft, dass sich Normen angeben lassen, welche Potenzen von p sind, also $p^g = N(1 + \alpha \pm \alpha^{n+1})$; $\alpha^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

Als Beispiel wählen wir $p = 83$, also $\lambda = 41$. Nehmen wir $\gamma = 2$ als primitive Wurzel (mod 83), so erhalten wir folgende 14 Zahlenpaare m, l

$$m = 0,\ 1,\ 72,\ 2,\ 27,\ 73,\ 8,\ 3,\ 62,\ 28,\ 4,\ 56,\ 63,\ 47$$

$$l = 1,\ 72,\ 2,\ 27,\ 73,\ 8,\ 3,\ 62,\ 28,\ 24,\ 56,\ 63,\ 47,\ 29.$$

Die unter einander stehenden Paare gehören zusammen. Beispielsweise liefert $m = 73$, $l = 8$ die Zahl $1 + \zeta^{73} - \zeta^8$, oder da $\zeta = -\alpha$, $\alpha^{41} = 1$ ist, die Zahl $1 - \alpha^{32} - \alpha^8$, welche gleichwertig mit $1 + \alpha^{24} - \alpha^{33}$ oder mit $1 + \alpha - \alpha^{27}$ ist, wenn wir nur die Berechnung der Norm ins Auge fassen. So erhalten wir folgende 13 Zahlen, deren Normen die Primzahl 83 als Faktor enthalten müssen:

$$1 + \alpha + \alpha^r, \quad \text{wo} \quad r = 34,\ 26,\ 37;$$

$$1 + \alpha - \alpha^r, \quad \text{wo} \quad r = 15,\ 8,\ 38,\ 27,\ 15,\ 34,\ 36,\ 14,\ 31,\ 20.$$

$2 - \zeta$ haben wir ausgeschlossen; $r = 15$ tritt zufällig zweimal auf.

Für $\lambda = 41$ erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$\mu =$	1,	2,	3,	4,	5,	11,	12
$\nu =$	1,	21,	14,	31,	33,	15,	24
$\mu + 1 =$	2,	3,	4,	5,	6,	12,	13
$\nu + 1 =$	2,	22,	15,	32,	34,	16,	25
$\xi =$	21,	14,	31,	33,	7,	24,	19
$\lambda - \mu =$	40,	39,	38,	37,	36,	30,	29
$\lambda - \nu =$	40,	20,	27,	10,	8,	26,	17
$\lambda - \xi + 1 =$	21,	28,	11,	9,	35,	18,	23.

Die in vertikaler Reihe stehenden Zahlen bilden eine Gruppe; jede Gruppe führt zu 4 Normen $N(1 + \alpha \pm \alpha^{\mu+1})$. Schliessen wir die erste Gruppe aus, so bleiben 24 Normen, deren Hälfte (12) durch 83 teilbar ist. Die genauere Ausrechnung ergibt, dass die Zahlen $1 + \alpha - \alpha^{15}$, $1 + \alpha - \alpha^{27}$, $1 + \alpha - \alpha^{8}$, $1 + \alpha - \alpha^{34}$, $1 + \alpha - \alpha^{36}$ die Norm $571\,787 = 83.83.83$ liefern. Die Zahlen gehören der dritten und fünften Gruppe an.

An dieser Stelle erlaube ich mir, die folgenden Worte des Herrn L. KRONECKER aus seinem Aufsatze *Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen*, Journal für Mathematik, Bd. 93, S. 359 anzuführen:

»Dass, wie JACOBI vermutet zu haben scheint, die von ihm mit $(\alpha, x)^\lambda$ bezeichneten Kreisteilungsausdrücke *stets* als Produkte konjugirter ψ-Funktionen darstellbar sein sollten, ist nach den oben dafür gefundenen Bedingungen kaum anzunehmen; denn darnach müsste stets eine Zahl m existiren, für welche jede der komplexen Zahlen

$$1 + \zeta^{km} - \zeta^{k\,\mathrm{ind}(1+g^m)}; \qquad (k=1, 2, \ldots, \lambda-2)$$

wo ζ eine Wurzel der Gleichung $\zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 1 = 0$ bedeutet, entweder eine komplexe Einheit oder aber ein Produkt konjugirter algebraischer Primteiler von λ ist. Ich habe jedoch noch für keinen Wert von λ feststellen können, dass diese Bedingungen nicht erfüllbar sind. Die erste Primzahl, welche in dieser Beziehung zur Untersuchung geeignet erscheint, ist $\lambda = 83$.«

Ersetzen wir λ in dieser Darlegung KRONECKER's durch p, so haben wir gesehen, dass sogar 5 verschiedene Werte für m angegeben werden können, welche für 83 jene Bedingungen erfüllen. Dagegen sind sie schon für die nächste Primzahl 89 *nicht* erfüllbar, jedoch für 97 wieder erfüllbar. Die erste Primzahl, welche zur weiteren Untersuchung einladet, dürfte $p = 107$ sein.[1]

§ 10.

Wenden wir uns schliesslich der Frage zu, welche Teiler die Normen zulassen, so werden wir finden, dass nur die Primzahlen von der Form

$$p = 2m\lambda + 1$$

in unzähliger Menge als Teiler von $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ vorkommen. Zu diesem Resultate gelangen wir leicht auf dem von E. KUMMER bei ähnlichen Untersuchungen betretenen Wege. Es besteht für jede Grösse x die Kongruenz:

$$(43) \qquad x^p - x \equiv x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \pmod{p}.$$

Diese sehr bekannte Beziehung kann man wohl am einfachsten durch Einführung der primitiven Wurzel g und Darstellung der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ durch die ihnen kongruenten Potenzen von g bestätigen. Nehmen wir nun $p = 2m\lambda + n$, $x = z + \alpha - \alpha^{\mu+1}$, setzen kurz

$$N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) = N(z),$$

so wird

$$(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})^p - (z + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \equiv \alpha^n - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1} \pmod{p},$$

[1] Bisher fand ich:

$$N(1 + a - a^{50}) = 107.243589,$$
$$N(1 + a - a^{4}) = 107.181579,$$
$$N(1 + a - a^{35}) = 107.246769,$$
$$N(1 + a - a^{41}) = 107.27773,$$
$$N(1 + a - a^{32}) = 107.107.7103. \qquad a^{53} = 1.$$

Aber keine trinomische Zahlform $1 + a - a^{\mu+1}$ hat mehr als *zwei* verschiedene Primteiler von 107 im Bereiche der 53sten Einheitswurzeln. Daher ist die Darstellung von 107^g als Norm einer solchen Zahlform nicht sehr wahrscheinlich.

also

$$\alpha^{n} - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1}$$

$$\equiv (z + \alpha - \alpha^{\mu+1})(z - 1 + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \dots (z - p + 1 + \alpha - \alpha^{\mu+1}) \pmod{p},$$

mithin:

(44) $$N(\alpha^{n} - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1})$$

$$\equiv N(z) \,.\, N(z - 1) \dots N(z - p + 1) \pmod{p}.$$

Diese Kongruenz gilt *allgemein*, für jeden Wert von z. Nehmen wir an, $N(z)$ enthalte den Teiler p, so muss sein

(45) $$N(\alpha^{n} - \alpha^{n(\mu+1)} - \alpha + \alpha^{\mu+1}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Will man also *alle* Primzahlen $p = 2m\lambda + n$ erhalten, welche als Teiler der unendlich vielen Normen $N(z + \alpha - \alpha^{\mu+1})$ auftreten können, so braucht man nur die linke Seite der Kongruenz (45) zu bilden. Für $n = 1$ gelten diese Schlüsse nicht. Primzahlen von der Form $p = 2m\lambda + 1$ können daher in unbegrenzter Menge auftreten. Die Induktion bestätigt diese Schlüsse. Fast alle Normen, welche ich berechnet habe, lieferten Teiler von der Form $2m\lambda + 1$. Nur für $\lambda = 31$ traten wiederholt die Divisoren 2^{5} und 5^{3} auf. Um auch ein Beispiel für $\lambda = 6n + 1$ neben dem obigen zu geben, teile ich die folgende Zusammenstellung mit.

$\lambda = 31.$

$\mu =$	1,	2,	3,	4,	5,	11
$\nu =$	1,	16,	21,	8,	25,	17
$\xi =$	16,	21,	8,	25,	26,	13
$\lambda - \mu =$	30,	29,	28,	27,	26,	20
$\lambda - \nu =$	30,	15,	10,	23,	6,	14
$\lambda - \xi + 1 =$	16,	11,	24,	7,	6,	19.

Die erste Gruppe liefert 3 Zahlen, nämlich

$$z + \alpha - \alpha^{2}, \qquad z + \alpha - \alpha^{16}, \qquad z + \alpha - \alpha^{30}.$$

Die fünfte liefert nur 2 Zahlen:

$$z + \alpha - \alpha^6, \qquad z + \alpha - \alpha^{26}.$$

Endlich geben wir eine Norm:

$$N(z + \alpha - \alpha^5) = z^{30} + 31(z^{23} - 42z^{19} + 9z^{16} + 91z^{15} + 466z^{12}$$
$$- 51z^{11} + 22z^9 + 770z^8 + 11z^7 - 173z^5 + 112z^4 - z^3 + 5z^2 + 7z + 1).$$

Die vier Normen für $z = 1$ sind (vergl. § 9)

38069, 46439, 6263, 5953.

Im Januar 1887.

UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

M. LERCH
à VINOHRADY.

Soit donnée une série de nombres entiers positifs

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

dont chaque terme est un diviseur de tous les suivants, et soient

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots$$

des quantités complexes dont les parties réelles sont respectivement

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots$$

et qui sont supposées positives et telles que la série $\sum\gamma_\nu$ soit divergente. Alors, dans tous les cas où la série

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

sera convergente pour chaque valeur de x moindre en valeur absolue que l'unité, elle définira une fonction de la variable x n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental $|x| \leqq 1$.

Car en posant

$$x = e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s} + ai\right)}$$

Acta mathematica. 10. Imprimé le 10 Mai 1887.

où a est un nombre entier et α une quantité réelle et positive on aura

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} c_\nu e^{\frac{2am_\nu}{m_s}\pi i - \alpha\pi m_\nu} + \sum_{\nu=s}^{\infty} c_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu}.$$

Or la série $\sum \gamma_\nu$ étant divergente et se composant de termes positifs il est aisé de voir que

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} \gamma_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu} = +\infty$$

d'où l'on a aussi

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} c_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu} = \infty$$

et par conséquent

$$\lim_{\alpha=0} \mathfrak{P}\left(e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s}+\alpha i\right)}\right) = \infty.$$

Donc la fonction $\mathfrak{P}(x)$ croît indéfiniment quand x s'approche d'une certaine manière des quantités de la forme $e^{\frac{2a}{m_s}\pi i}$ qui se présentent dans chaque partie de la circonférence $|x| = 1$. Par conséquent, cette ligne-ci est une ligne singulière de la fonction $\mathfrak{P}(x)$.

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

PAR

GUSTAF KOBB
À STOCKHOLM.

Dans son mémoire *De motu puncti singularis,*[1] JACOBI a étudié le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution et il a démontré le théorème suivant:

»S'il existe une fonction de force et si le mouvement ne dépend que de la position du point matériel dans une section méridionale de la surface, on peut toujours ramener l'intégration des équations du mouvement à des quadratures.»

Dans les cas où l'équation de la surface est algébrique et la fonction de force une fonction rationnelle, ces quadratures sont des intégrales Abéliennes. Je me propose donc de trouver les conditions nécessaires, que doit remplir l'équation de la surface pour que ces intégrales Abéliennes se réduisent à des intégrales elliptiques.

Traitons la question à l'aide des coordonnées rectilignes et supposons la masse du mobile égale à l'unité.

Si l'axe des x coïncide avec l'axe de révolution, l'équation de la surface prend la forme

$$f(y^2 + z^2, x) = 0$$

et la fonction de force la forme

$$U = R(y^2 + z^2, x).$$

[1] Journal für Mathematik, T. 24, 1842, p. 5—27.

Soient x, y, z les coordonnées du point à l'époque t, nous aurons pour équations de mouvement

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \mu.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \mu.\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \mu.\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Le principe des forces vives et le principe des aires nous fournissent deux intégrales du système (1), savoir

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= 2H + 2U\\
x.\frac{dy}{dt} - y.\frac{dz}{dt} &= c
\end{aligned}
$$

où H et c sont des constantes d'intégration. Nous poserons ensuite

$$
\begin{aligned}
z &= r.\cos \Psi\\
y &= r.\sin \Psi.
\end{aligned}
$$

Les équations (2) deviennent alors

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2.\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 &= 2H + 2U\\
r^2.\frac{d\Psi}{dt} &= c\\
f(r^2,\ x) &= 0
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right].\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= r^2(2H + 2U) - c^2\\
r^2.\frac{d\Psi}{dt} &= c
\end{aligned}
$$

et par conséquent

(4)
$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,.dx}{\sqrt{r^2(2H+2U)-c^2}}$$

$$\Psi - \Psi_0 = c\int_0^t \frac{dt}{r^2} = c\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,.dx}{r\sqrt{r^2(2H+2U)-c^2}}.$$

Ainsi, si l'équation de la surface est une équation algébrique et U une fonction rationnelle, t et Ψ sont exprimés par des intégrales Abéliennes de la variable x. Pour les ramener à la forme normale nous poserons

$$\xi^2 = \frac{r^2\left[1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]}{r^2(2H+2U)-c^2}.$$

En éliminant r^2 entre cette expression et l'équation

$$f(r^2, x) = 0$$

nous aurons une nouvelle équation

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Nous allons démontrer, que si la première équation est irréductible, la dernière l'est aussi. Dans ce but nous employons le théorème suivant donné par M. WEIERSTRASS dans ses leçons sur la théorie des fonctions Abéliennes:

»Soit

$$f(x, y) = 0$$

une équation algébrique irréductible de degré n en y et

$$z = R(x, y)$$

où R désigne une fonction rationnelle. Formons la résolvante de GALOIS

$$\prod_{\beta=1}^{n}[z - R(x, y_\beta)] = \frac{G(x, z)}{G_0(x)}.$$

Ici il peut se présenter deux cas, l'équation

$$G(x, z) = 0$$

est ou bien irréductible, ou, si elle est réductible, on doit avoir

$$G(x, z) = [G_1(x, z)]^p$$

où p est un diviseur de n et l'équation

$$G_1(x, z) = 0$$

est une équation irréductible. Dans le premier cas, on a aussi

$$y = R_1(x, z)$$

où R_1 désigne une fonction rationnelle et les deux courbes

$$G(x, z) = 0; \qquad F(x, y) = 0$$

sont de même genre.

Pour que le second cas puisse avoir lieu, il faut que les (n) valeurs de z, qui correspondent à chaque valeur de x et aux (n) valeurs différentes de y, se partagent en un certain nombre de groupes égaux entre eux. Si donc on peut montrer, que pour une certaine valeur de x et pour les n valeurs différentes correspondantes de $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$, les n valeurs de z

$$z_1 = R(x, y_1), \qquad z_2 = R(x, y_2), \quad \ldots, \quad z_n = R(x, y_n)$$

sont toutes différentes entre elles, il en résulte que l'équation

$$G(x, z) = 0$$

est irréductible.»

Supposons maintenant

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

une équation réductible, tandis que

$$f(r^2, x) = 0$$

est irréductible,

Il faut donc, qu'au moins deux valeurs de ξ^2 coïncident pour des valeurs ordinaires de x:

$$\frac{r_\mu^2\left[1 + \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right]}{r_\mu^2(2H + 2U_\mu) - c^2} = \frac{r_\nu^2\left[1 + \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]}{r_\nu^2(2H + 2U_\nu) - c^2}.$$

d'où résulte après quelques réductions la relation suivante

$$r_\mu^2 . r_\nu^2 . 2H\left[\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right] - c^2\left[r_\mu^2\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - r_\nu^2 . \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2 + r_\mu^2 - r_\nu^2\right]$$

$$+ 2r_\mu^2 . r_\nu^2\left[U_\nu\left[1 + \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right] - U_\mu\left[1 + \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right]\right] = 0;$$

mais puisque H et c^2 sont des constantes arbitraires, il faut que leurs coefficients s'annullent, ainsi

$$r_\mu^2 . r_\nu^2\left[\left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2\right] = 0$$

$$r_\mu^2 . \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2 - r_\nu^2 . \left(\frac{dr_\nu}{dx}\right)^2 + r_\mu^2 - r_\nu^2 = 0.$$

On en tire

$$(r_\mu^2 - r_\nu^2)\left[1 + \left(\frac{dr_\mu}{dx}\right)^2\right] = 0$$

ou

$$r_\mu^2 - r_\nu^2 = 0$$

mais cela est impossible, car l'équation

$$f(r^2, x) = 0$$

est irréductible.

Ainsi la nouvelle équation

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

ne peut être réductible, elle est donc irréductible. Il résulte de là, qu'on peut exprimer r^2 comme fonction rationnelle de ξ^2 et x:

$$r^2 = R_1(\xi^2, x)$$

et par conséquent, si nous considérons

$$f(r^2, x) = 0$$

comme équation entre r^2 et x et

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

comme équation entre ξ^2 et x, les deux courbes algébriques définies par ces équations sont de même genre.

Le système (4) prend la forme

$$t = \int_{x_0}^{x} \xi dx$$

(5)
$$\Psi - \Psi_0 = c \int_{x_0}^{x} \frac{\xi dx}{R_1(\xi^2, x)}$$

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Pour trouver le genre de

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ et x nous employons ce théorème général:

»Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique de genre ρ et λ le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$x = a + \tau^{2\nu}$$
$$y = \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où μ est un nombre *impair*.[1] En désignant par ρ' le genre de la courbe $f(x, z^2) = 0$ où $z^2 = y$, nous aurons la relation suivante

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.«$$

Pour démontrer cette relation nous employons une formule donnée par M. Weierstrass.

---

[1] Je désigne par $\mathfrak{p}(\tau)$ une série contenant seulement des puissances positives de la variable τ.

»Soit $F(x, y) = 0$ une courbe algébrique, où le domaine du point $x = \infty$, $y = \infty$ est représenté par les n systèmes distincts

$$x = \tau^{-1}$$
$$y = b_\nu \tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau).$$

En désignant par ρ le genre de la courbe et par

$$s = \Sigma(s_\nu - 1)$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

la sommation étendue à tous les systèmes circulaires où le nombre s_ν a des valeurs positives, on a la formule

$$2\rho = s - 2n + 2.»$$

Nous considérons d'abord les systèmes circulaires de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Soit

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau) \qquad (b_\nu \gtrless 0)$$

un des systèmes, qui représentent le domaine du point analytique (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

En substituant

$$z^2 = y$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z^2 = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

nous aurons dans le domaine du point $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$
$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z = + \sqrt{b_\nu} + \mathfrak{p}_1(\tau)$$

et dans le domaine du point $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$z = -\sqrt{b_\nu} + \mathfrak{p}_2(\tau).$$

Comme nous pouvons employer le même raisonnement pour autres systèmes circulaires, nous en tirons:

au point (a_ν, b_ν) (où $b_\nu \gtrless 0$) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

correspondent deux points $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ et $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$ de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

dont les domaines sont représentés par des systèmes circulaires du même nombre et de la même nature. Ainsi, soit (a_ν, b_ν) un point non critique, les deux points $(a_\nu + \sqrt{b_\nu})$ et $(a_\nu - \sqrt{b_\nu})$ sont aussi des points non critiques.

Nous supposons ensuite

$$b_\nu = 0.$$

Ainsi nous aurons

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \qquad (\alpha \gtrless 0)$$
$$y = \alpha\tau^{\mu}[1 + \mathfrak{p}(\tau)]. \qquad (\mu \gtrless 0)$$

Soit

$$\mu = 2\mu'.$$

On en tire

$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ z = +\sqrt{\alpha}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_1(\tau)] \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ z = -\sqrt{\alpha}\cdot\tau^{\mu'}[1 + \mathfrak{p}_2(\tau)]. \end{cases}$$

Par conséquent le nombre des systèmes est doublé, mais leur nature n'est pas changée.

Soit à présent

$$\mu = 2\mu' + 1$$

nous ne pouvons pas représenter le domaine du point correspondant de la courbe

$$f(x,\ z^2) = 0$$

par des systèmes circulaires de la même nature. Il faut donc poser

$$x = a_\nu + \tau^{2s_\nu}$$
$$z = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)].$$

Le nombre des systèmes n'est pas changé. Ainsi, soit $(a_\nu, 0)$ ou (a_ν, ∞) des points non critiques de la courbe

$$f(x,\ y) = 0$$

ils sont des points critiques de la courbe

$$f(x,\ z^2) = 0.$$

Si la série y_τ commence par une puissance paire, le domaine est représenté par les deux systèmes

$$\begin{cases} x = a_\nu + \tau \\ z = +\sqrt{a}\cdot\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}_1(\tau)] \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= a_\nu + \tau \\ z &= -\sqrt{a}\cdot\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}_2(\tau)] \end{aligned}$$

et si y_τ commence par une puissance impaire, le domaine est représenté par le système

$$x = a_\nu + \tau^2$$
$$z = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)].$$

Maintenant nous allons transformer les deux courbes

$$f(x,\ y) = 0; \qquad f(x,\ z^2) = 0$$

de manière que le point $x = \infty$ ne soit pas un point critique.

Soit $x = a$ une valeur, à laquelle correspondent n valeurs distinctes de la variable y

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n.$$

Posons

$$\xi = \frac{1}{x - a}$$

$$\eta = \frac{y}{x - a}.$$

Comme (a, b_ν) est un point non critique, nous avons

$$x = a + \tau$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

et par conséquent

$$\xi = \tau^{-1}$$
$$\eta = b'_\nu . \tau^{-1} + \mathfrak{p}_1(\tau).$$

Ainsi par cette substitution linéaire, nous pouvons former une nouvelle courbe algébrique

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

de même genre, où, quand ξ croît indéfiniment, le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ tend vers n valeurs finies distinctes

$$b'_1, b'_2, \ldots, b'_n.$$

Il faut donc remarquer, que si $(x = \infty, y = \infty)$ est un point critique, le point $(\xi = 0, \eta = \infty)$ est aussi un point critique de la même nature. De la même manière nous formons par la substitution

$$\xi_1 = \frac{1}{x - a_1}$$

$$\eta_1 = \frac{z}{x - a_1}$$

où $x = a_1$ est une valeur non critique de la courbe

$$f(x, z^2) = 0$$

une nouvelle courbe algébrique

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$$

de même genre, que $f(x, z^2) = 0$, et où le rapport $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ tend vers $2n$ valeurs distinctes

$$c_1, c_2, \ldots, c_{2n}.$$

Soit

$$x = a_\nu + \tau^{s_\nu}$$
$$y = b_\nu + \mathfrak{p}(\tau)$$

un des systèmes, qui représentent le domaine du point (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

nous aurons si

$$|x - a_\nu| < |a - a_\nu|,$$

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu - (x - a_\nu)} = -\frac{1}{a - a_\nu}\left\{1 + \frac{x - a_\nu}{a - a_\nu} + \left(\frac{x - a_\nu}{a - a_\nu}\right)^2 + \left(\frac{x - a_\nu}{a - a_\nu}\right)^3 + \ldots\right\}$$

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu} - \frac{\tau^{s_\nu}}{a - a_\nu} - \frac{\tau^{2s_\nu}}{(a - a_\nu)^2} - \ldots$$

$$\eta = y \cdot \xi = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu} + \mathfrak{p}_1(\tau).$$

Supposons

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu} + \tau_1^{s'_\nu}$$

$$\eta = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu} + \mathfrak{p}_2(\tau_1).$$

Dans la théorie des fonctions algébriques on démontre le théorème suivant:

»Si l'on peut représenter un certain domaine du point analytique (a, b) de la courbe

$$F(x, y) = 0$$

par les deux systèmes

$$x = a + \mathfrak{p}_1(\tau) = a + \mathfrak{p}_1^{(1)}(\tau_1)$$

$$y = b + \mathfrak{p}_2(\tau) = b + \mathfrak{p}_2^{(1)}(\tau_1)$$

il existe entre les deux variables auxiliaires la relation

$$\tau_1 = g\tau[1 + \mathfrak{p}(\tau)].\text{«} \qquad (g \gtrless 0)$$

En employant ce théorème nous aurons

$$s'_\nu = s_\nu.$$

Ainsi le domaine du point

$$\xi = -\frac{1}{a - a_\nu}, \qquad \eta = -\frac{b_\nu}{a - a_\nu}$$

qui correspond au point (a_ν, b_ν) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est représenté à la même manière, que le domaine du point (a_ν, b_ν). Le nombre des systèmes est le même et leur nature n'est pas changée.

Le même raisonnement s'applique à la courbe

$$\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer le genre des nouvelles courbes

$$\varphi(\xi, \eta) = 0; \qquad \varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0.$$

Dans la courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$, le domaine du point $(\xi = \infty, \eta = \infty)$ est représenté par les n systèmes distinctes

$$\begin{aligned} \xi &= \tau^{-1} \\ \eta &= b_\nu^{(1)}\tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau). \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu=1, 2, \ldots, n)}$$

En employant la formule de M. Weierstrass nous aurons le genre ρ de la courbe

$$2\rho = s - 2n + 2$$

où

$$\begin{aligned} s &= \Sigma(s_\nu - 1) \\ x &= a_\nu + \tau^{s_\nu} \\ y &= b_\nu + \mathfrak{p}_1(\tau) \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (b_\nu \gtreqless 0)}$$

la sommation étendue à tous les systèmes circulaires de la courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$ où s_ν a des valeurs positives.

Dans la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$ le domaine du point $(\xi_1 = \infty, \eta_1 = \infty)$ est représenté par $2n$ systèmes distincts

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \tau^{-1} \\ \eta_1 &= c_\nu \tau^{-1} + \mathfrak{p}(\tau). \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu=1, 2, \ldots, 2n)}$$

En désignant par

$$s_1 = \Sigma(s'_\nu - 1)$$

la somme correspondante pour la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$ et par ρ' son genre, nous aurons

$$2\rho' = s_1 - 4n + 2.$$

Pour exprimer s_1 par s nous décomposons s_1 en quatre sommes

$$s_1 = \sum_{(1)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(2)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(3)}(s'_\nu - 1) + \sum_{(4)}(s'_\nu - 1).$$

Dans la première somme, la sommation est étendue aux points de la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$, qui correspondent aux points critiques (a_ν, b_ν), où $b_\nu \gtrless 0$, de la courbe $f(x, y) = 0$; dans la deuxième aux points, qui correspondent aux points critiques $(a_\nu, 0)$ et (a_ν, ∞) de la courbe $f(x, y) = 0$ où y_τ commence par une puissance paire; dans la troisième aux points, qui correspondent aux points critiques $(a_\nu, 0)$ et (a_ν, ∞) de la courbe $f(x, y) = 0$, mais où y_τ commence par une puissance impaire et enfin dans la quatrième aux points, qui correspondent aux zéros et pôles non critiques de la courbe $f(x, y) = 0$.

Nous avons trouvé qu'à chaque point (a_ν, b_ν), $b_\nu \gtrless 0$ de la courbe $f(x, y) = 0$ correspondent deux points de la courbe $\varphi_1(\xi_1, \eta_1) = 0$, dont les domaines sont représentés par des systèmes circulaires du même nombre et de la même nature que le domaine du point (a_ν, b_ν). On en tire

$$s'_\nu = s_\nu$$

$$\sum_{(1)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(1)}(s_\nu - 1).$$

Dans la deuxième somme le nombre de points et la nature des systèmes ne sont pas changés, mais le nombre des systèmes est doublé; ainsi

$$s'_\nu = s_\nu$$

$$\sum_{(2)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(2)}(s_\nu - 1).$$

Dans la troisième le nombre de points et de systèmes ne sont pas changés, mais

$$s'_\nu = 2s_\nu$$

$$\sum_{(3)}(s'_\nu - 1) = 2\sum_{(3)}(s_\nu - 1) + \lambda_1$$

si nous désignons par λ_1 le nombre total de systèmes pour ces points.

Dans la quatrième somme on a

$$s'_\nu = 1$$

si la série correspondante y_τ commence par une puissance paire et

$$s'_\nu = 2$$

si la série y_τ commence par une puissance impaire. Par conséquent, en désignant par λ_2 le nombre de ces dernières, on a

$$\sum_{(4)}(s'_\nu - 1) = \lambda_2.$$

Ainsi

$$s_1 = 2\sum_{(1)}(s_\nu - 1) + 2\sum_{(2)}(s_\nu - 1) + 2\sum_{(3)}(s_\nu - 1) + \lambda_1 + \lambda_2$$

mais

$$s = \sum_{(1)}(s_\nu - 1) + \sum_{(2)}(s_\nu - 1) + \sum_{(3)}(s_\nu - 1)$$

donc

$$s_1 = 2s + \lambda_1 + \lambda_2$$

ou, en désignant par λ le nombre total de systèmes de la courbe $f(x, y) = 0$

$$x = a + \tau^{s_\nu}$$

$$y = \alpha\tau^\mu[1 + \mathfrak{p}(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où μ est un nombre *impair*,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$

$$s_1 = 2s + \lambda,$$

par conséquent

$$2\rho' = 2s + \lambda - 4n + 2$$

et en combinant cette équation avec l'équation

$$2\rho = s - 2n + 2$$

on aura

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

C. Q. F. D.

De la même manière on peut démontrer ce théorème plus général:

»Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique de genre ρ et λ_m le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$x = a + \tau^{s\nu}$$
$$y = \alpha\tau^{\mu}[1 + p(\tau)] \qquad (\alpha \gtrless 0)$$

où, si m est un nombre premier, μ est un nombre premier avec m. En désignant par ρ_m le genre de la courbe $f(x, z^m)$ où $z^m = y$, nous aurons la relation suivante

$$2\rho_m = 2m\rho + (\lambda_m - 2)(m - 1).»$$

Maintenant nous allons démontrer, que le nombre λ ne peut être nul, si

$$\rho \geqq 1.$$

Soit

$$f(x, y) = 0$$

une courbe algébrique de genre ρ. Formons par la transformation birationnelle

$$x = R(\xi, \eta), \qquad \xi = R_2(x, y)$$
$$y = R_1(\xi, \eta), \qquad \eta = R_3(x, y)$$

une nouvelle courbe algébrique de même genre

$$\varphi(\xi, \eta) = 0$$

où nous supposons que le nombre λ soit nul.

Ainsi en substituant les séries x_τ, y_τ, qui représentent le domaine d'un point arbitraire de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

dans l'expression

$$\eta = R_3(x, y)$$

la série y_τ ne commence jamais par une puissance impaire. Alors nous pouvons extraire la racine carrée

$$\sqrt{\eta_\tau} = \eta_\tau^{(1)} = P(\tau)$$

où $P(\tau)$ est une série, qui ne contient qu'un nombre fini de puissances

négatives dans le domaine d'un point quelconque. Ainsi $\eta^{(1)}$ est une fonction rationnelle de x et y.

Donc
$$\xi = R_2(x, y), \qquad x = R(\xi, [\eta^{(1)}]^2)$$
$$\eta^{(1)} = \overline{R}_3(x, y), \qquad y = R_1(\xi, [\eta^{(1)}]^2)$$
et la courbe algébrique
$$\varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0$$
est aussi de genre ρ. Les deux courbes
$$\varphi(\xi, [\eta^{(1)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0$$
sont donc de même genre
$$\rho' = \rho$$
mais suivant la formule
$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2$$
il résulte, puisque nous supposons $\lambda = 0$,
$$2\rho = 4\rho - 2;$$
ce qui est impossible, si
$$\rho > 1.$$
Ainsi le nombre λ ne peut être nul, si
$$\rho > 1.$$
Soit
$$\rho = 1.$$
Supposons que le nombre λ soit nul pour la courbe
$$\varphi(\xi, \eta^{(1)}) = 0.$$
En posant
$$\sqrt{\eta^{(1)}} = \eta^{(2)}$$
nous obtenons par le même procédé, que les deux courbes
$$\varphi(\xi, [\eta^{(2)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(2)}) = 0$$
sont de genre 1.

Cela exige que le nombre λ pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(2)}) = 0$$

soit nul. Si tel est le cas nous répétons le même procédé et enfin il faut que nous trouvions une courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(n-1)}) = 0$$

où

$$\lambda > 0.$$

Car

$$\eta^{(n)} = \sqrt[2^n]{R_3(x, y)} = \sqrt{\eta^{(n-1)}}.$$

Il est évident, qu'en donnant à n une valeur assez grande, $\eta^{(n)}$ doit nécessairement cesser d'être une fonction rationnelle et par-conséquent $\eta_\tau^{(n-1)}$ commence par une puissance impaire au moins dans le domaine d'un point. Mais alors les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(n-1)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(n-1)}) = 0$$

ne sont pas de même genre, selon la formule

$$2p' = 4p + \lambda - 2.$$

On en tire que la supposition $\lambda = 0$ pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta^{(n-2)}) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\xi, [\eta^{(n-1)}]^2) = 0$$

n'est pas juste, et par conséquent les deux courbes

$$\varphi(\xi, [\eta^{(n-2)}]^2) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta^{(n-2)}) = 0,$$

ne sont pas de même genre. En répétant le même raisonnement, nous aurons enfin que le nombre λ ne peut être nul pour la courbe

$$\varphi(\xi, \eta) = 0.$$

Ainsi nous avons trouvé

$$\lambda > 0$$

si

$$\rho \geqq 1.$$

Reprenons notre système d'équations (5)

$$t = \int_{x_0}^{x} \xi dx$$

$$\psi - \psi_0 = c \int_{0}^{t} \frac{\xi dx}{R(\xi^2, x)}$$

$$\varphi(\xi^2, x) = 0.$$

Maintenant nous pouvons résoudre la question: quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales du système (5) soient des intégrales elliptiques?

En désignant par ρ' le genre de la courbe

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ et x et par ρ le genre de la même courbe considérée comme équation entre ξ^2 et x nous aurons la formule

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

En posant

$$\rho' = 1$$

on a

$$\rho = 0, \qquad \lambda = 4.$$

Mais la courbe

$$\varphi(\xi^2, x) = 0$$

considérée comme équation entre ξ^2 et x et la courbe

$$f(x, r^2) = 0$$

considérée comme équation entre r^2 et x sont de même genre.

Par conséquent

$$r^2 = R_1(\zeta)$$
$$x = R_2(\zeta)$$

où R_1 et R_2 sont des fonctions rationnelles du paramètre ζ.

Ayant donc

$$\xi^2 = \frac{r^2\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]}{r^2(2H + 2U) - c^2}$$

et par conséquent ξ^2 une fonction rationnelle de ζ, il faut déterminer R_1 et R_2 de manière que l'expression de ξ ne contienne qu'une racine carrée

$$\sqrt{R_3(\zeta)}$$

où $R_3(\zeta)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré.

Supposons

$$U = k$$

où k désigne une constante, on sait que le point matériel décrit une ligne géodésique de la surface. Par conséquent on peut énoncer ce théorème:

»Toutes les surfaces de révolution, qui ont la propriété, que les coordonnées d'une ligne géodésique peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramètre, sont nécessairement de la forme

$$r^2 = R_1(\zeta)$$
$$x = R_2(\zeta).«$$

Supposons ensuite que la seule force agissante soit la pésanteur, c'est à dire

$$U = gx,$$

nous trouvons, que l'intégration du système (5) peut être effectuée par

des fonctions elliptiques, si la surface de révolution est déterminée par une de ces cinq équations

(1) $$r = mx$$

(2) $$r^2 + x^2 = a^2$$

(3) $$r^2 = 4ax$$

(4) $$9ar^2 = x(x - 3a)^2$$

(5) $$2r^4 + 3a^2r^2 - 2xa^3 = 0.$$

Ce sont les seuls cas possibles. Les trois premiers cas étaient déjà connus, les deux autres me semblent nouveaux.

ÜBER DIE BEDEUTUNG DES PRINCIPS DER LEBENDIGEN KRAFT FÜR DIE FRAGE VON DER STABILITÄT DYNAMISCHER SYSTEME

VON

KARL BOHLIN
in STOCKHOLM.

Sehr viele mechanische Probleme, und zwar alle solche, wo die wirkenden Kräfte als partielle Ableitungen eines von der expliciten Zeit unabhängigen Potentials betrachtet werden können, führen auf Differentialgleichungen, zu welchen ein erstes Integral — die Gleichung der lebendigen Kraft — sich unmittelbar ergiebt. Nicht selten erhält man auch aus den Differentialgleichungen einer Aufgabe, es sei einer mechanischen oder irgend welcher anderen, ein erstes Integral, welches, wenn es auch mit dem Namen der lebendigen Kraft nicht zu bezeichnen ist, doch den Charakter des so benannten Integrales besitzt, hauptsächlich insofern die linke Seite der Gleichung unter quadratischer Form auftritt. In solchen Fällen, wo die Veränderlichen, wie bei mechanischen Aufgaben, nur reelle Werthe annehmen können, erlaubt die besagte Form der Gleichung eine Betrachtungsweise, wodurch man oft über die Grenzen der Veränderlichen eine Entscheidung treffen kann. Handelt es sich um die Bewegungen eines Systems materieller Punkte, so ist die Zeit als unabhängige Veränderliche ganz unbeschränkt, die Koordinaten der beweglichen Punkte können aber durch die Natur des Integrals der lebendigen Kraft oder einer entsprechenden Gleichung zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sein. In den Fällen, wo es gelingt solche Grenzen an-

zugeben, hat man auf die Frage von der Stabilität der Bewegung, unabhängig von der vollständigen Lösung der Differentialgleichungen, eine Antwort gefunden. Eine solche Antwort wird nun im allgemeinen möglich sein, so oft das anzuwendende Integral, kurzweg die Gleichung der lebendigen Kraft, nur die Koordinaten eines einzigen Punktes als Veränderliche enthält. Ausser den Fällen, wo nur *ein* beweglicher Punkt in Frage kommt, gehört hierher ein komplicirterer Fall, welcher einigen Kombinationen von drei Körpern in unserem Sonnensysteme sehr nahe entspricht. Aber auch wenn das Princip der lebendigen Kraft zur vollständigen Entscheidung über die Stabilitätsfrage nicht ausreicht, lassen sich doch im allgemeinen aus demselben gewisse Betrachtungen über die Grenzen der Bewegung ziehen.

Indem wir uns erlauben die erwähnte Betrachtungsweise nebst einigen Beispielen in den folgenden Seiten mitzutheilen, werden wir voraussetzen, dass die Bewegungen in einer Ebene stattfinden. Man überzeugt sich leicht, dass diese Annahme keine wesentliche Beschränkung enthält und dass man nachher ohne Schwierigkeit auf die dritte Dimension Rücksicht nehmen kann.

Um die Begriffe festzuhalten, betrachten wir den folgenden einfachen Fall. Wir nehmen nämlich an, dass die Bewegungsgleichungen eines in der Ebene freien materiellen Punktes P auf ein erstes Integral von der Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - f(x, y) + h = 0$$

führen. Hier bezeichnet ds das Differential von dem Wege des Punktes, x und y seine rechtwinkligen Koordinaten und h die Integrationskonstante. In der Function $f(x, y)$ treten aber im allgemeinen die x und y nicht unmittelbar als Koordinaten auf, sondern diese Function ergiebt sich zunächst unter der Form $F(r, \rho)$, wo r und ρ die beiden Abstände des Punktes P von zwei anderen Punkten bedeuten. Da die letztere Form sich als einfacher für die Diskussion erweist, werden wir dieselbe beibehalten, indem wir r und ρ als Koordinaten wählen und folgende Form des Integrals annehmen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R, \tag{1}$$

wo die Bezeichnung

$$(2) \qquad R = F(r, \rho) - h$$

angewandt ist. Wir stellen jetzt die Gleichung

$$(3) \qquad R = 0$$

auf. Dieselbe bezeichnet im allgemeinen eine Kurve, welche nach (1) so beschaffen ist, dass die Geschwindigkeit des Punktes m gleich Null ist, so oft der Punkt sich auf dieser Kurve befindet. Ebenso stellt die Gleichung

$$R = c^2$$

eine Kurve dar, wo die Geschwindigkeit des Punktes m den Werth c hat. Es ist einleuchtend, dass diese Kurven in Bezug auf die Verbindungslinie der beiden Anfangspunkte des bipolaren Koordinatsystemes symmetrisch sind. Durch die Kurve (3) wird nun die Ebene in Theile zerlegt und im allgemeinen in solcher Weise, dass die Function R ihr Zeichen ändert, wenn der Punkt (r, ρ) die Kurve überschreitet. Der Zeichenwechsel trifft immer zu, sobald die Kurve (3) nicht eine s. g. Minimikurve ist, welche dadurch charakterisirt wird, dass die Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial \rho} = 0$$

gleichzeitig mit (3) bestehen. Abgesehen von solchen Ausnahmefällen nimmt also die Function R in einigen von den Theilen, in welche die Ebene durch (3) zerfällt, positive, in Anderen sicher negative Werthe an. Negative Werthe kann aber die Function R nach (1) niemals annehmen, insofern die r und ρ die Koordinaten des beweglichen Punktes P bezeichnen. Der letztere muss sich also immer in einem positiven Gebiete der Ebene befinden und seine Bewegung wird in solcher Weise durch die Kurve (3) begrenzt. Ist diese Kurve eine geschlossene, so bleibt die Bewegung im gewöhnlichen Sinne stabil. Nun ist es ja mit dem Angeführten keineswegs gesagt, dass der Punkt P diese Grenze je erreichen soll. Wenn er sie aber erreicht, so wird seine Bewegungskurve in dem bezüglichen Punkte im allgemeinen eine Spitze beschreiben, indem die Geschwindigkeit auf dieser Kurve (3) gleich Null ist. Die Existenz und die

Natur der Grenzkurve hängen von der Form der Function $F(r, \rho)$ und von dem Werthe der Integrationskonstante h ab. Die letztere ihrerseits wird durch die Anfangslage und den numerischen Werth (nicht die Richtung) der Anfangsgeschwindigkeit folgendermassen

$$h = F(r_0, \rho_0) - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2$$

bestimmt.

Als erstes Beispiel für diese Betrachtungen wählen wir das Zweikörperproblem. Die Gleichung der lebendigen Kraft hat hier die Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 0,$$

wo $\frac{\mu}{a}$ statt h steht. Die Gleichung (3) wird in diesem Falle von der einfachsten Gestalt; man erhält in der That

$$r = 2a.$$

Wenn a positif ist, so bezeichnet diess einen Kreis, um den einen der materiellen Punkte als Mittelpunkt beschrieben und mit dem Radius $2a$. Nach dem Vorhergehenden, sehen wir sofort ein, dass die Bewegung des zweiten Punktes stets innerhalb dieses Kreises stattfinden muss. Dies ist auch, was von der vollständigen Lösung der Aufgabe bestätigt wird, da ja in der That alle Ellipsen mit der halben grossen Axe a innerhalb des Kreises

$$r = 2a$$

fallen müssen. Wenn die Excentricität der Ellipse gleich Eins wird, so geht diese in eine gerade Linie von der Länge $2a$ über — eine Kurve, welche in der That an dem Kreise eine Spitze macht. Wenn a unendlich oder negativ wird, so existirt die Grenzkurve nicht mehr. In diesen Fällen ist ja auch die Bahn entweder eine Parabel oder eine Hyperbel. Den verschiedenen Annahmen über a entsprechen die bekannten Anfangsbedingungen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}.$$

Gehen wir jetzt zu dem Probleme von der Bewegung eines Punktes,

welcher von zwei festen Centra angezogen wird, über, so erhalten wir aus dem Princip der lebendigen Kraft für diesen Fall, oder

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} - h,$$

die folgende Form der Gleichung (3)

$$\frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} = h,$$

wo r und ρ die beiden Abstände des beweglichen Punktes von den festen Anziehungscentra m und μ bedeuten. Wenn die Integrationskonstante h einen positiven Werth hat, so bezeichnet diese Gleichung eine Kurve von der allgemeinen Natur einer Lemniskate. Ihre Form ist von den Konstanten der Gleichung abhängig; je nachdem h einen hinlänglich grossen oder hinlänglich kleinen Werth besitzt, besteht die Begrenzung der Bewegung entweder aus zwei geschlossenen und ausserhalb einander fallenden Konturen, welche jeden der Punkte m und μ umgeben, oder aus einer einzigen geschlossenen Linie, welche beide diese Punkte umfasst. Diese beiden Formen gehen in einem Grenzfalle in einander über, nämlich wenn die beiden m und μ resp. umschliessenden Gebiete, in einem Punkte der Verbindungslinie dieser beiden Centra, zusammenhängen. Innerhalb eines auf solche Weise abgegrenzten Raumes muss nun der bewegliche Punkt bleiben; die Stabilität seiner Bewegung ist also durch einen positiven Werth von h gesichert.[1] Da die fragliche mechanische Aufgabe vollständig gelöst worden ist, so kann man sich *a posteriori* von der Richtigkeit unserer Schlüsse überzeugen. Wir kommen aber nun zu Fällen, wo diese Kontrolle nicht möglich ist, indem die vollständige Integration der bezüglichen Differentialgleichungen bis jetzt nicht geleistet worden ist.

Wir stellen uns vor, dass ein materieller Punkt μ, mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit n, einen Kreis von dem Radius a um einen zweiten, festen Punkt m beschreibt. Die beiden Punkte attrahiren einen dritten

[1] Mit einem Verfahren, welches Jacobi in seiner vierten Vorlesung »Über Dynamik» auf das n-Körperproblem angewandt hat, zeigt man leicht dass die Bewegung nothwendig instabil ist, wenn h einen negativen Werth hat.

Punkt P, von welchem aber vorausgesetzt wird, dass er auf die Vorigen keine Einwirkung ausübt. Man sucht die Bedingungen dafür, dass die Bewegung des letzteren in Bezug auf die beiden anziehenden Punkte stabil sein soll. Es ist überflüssig zu bemerken, dass die Bewegungen des so fingirten Systemes denjenigen eines eigentlichen Dreikörperproblemes nicht gleich werden können, da es, abgesehen von einem bekannten Specialfalle dieses Problemes, augenscheinlich unmöglich ist, dass Einer von drei einander anziehenden Körpern einen Kreis um einen Anderen beschreibt. Das angenommene System entspricht aber in der That *sehr nahe* einigen Kombinationen im Sonnensysteme, z. B. den beiden Körpern, Jupiter und Sonne, in ihrer gleichzeitigen Anziehung an einen dritten Körper, dessen Masse, wie diejenigen der Kometen oder der kleinen Planeten, zu vernachlässigen ist. Ausserdem scheint der gestellten Aufgabe durch den Umstand einiges Interesse verliehen zu werden, dass die vollständige Bestimmung der Bewegung auf Schwierigkeiten stösst, welche denjenigen des Dreikörperproblems nahe verwandt sind.

Bezeichnet man mit ξ, η die Koordinaten des Punktes P in Bezug auf ein festes Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in m, mit r und ρ die Abstände des Punktes P von m und μ resp. und mit

$$x' = a\cos(nt + A), \qquad y' = a\sin(nt + A)$$

die Koordinaten von μ, so bekommen die Bewegungsgleichungen von P die folgende Gestalt

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{m\xi}{r^3} + \frac{\mu(\xi - x')}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{m\eta}{r^3} + \frac{\mu(\eta - y')}{\rho^3} = 0.$$

Beziehen wir nun durch die Substitutionen

$$\xi = x\cos(nt + A) - y\sin(nt + A)$$

$$\eta = x\sin(nt + A) + y\cos(nt + A)$$

die Lage von P auf ein bewegliches Koordinatensystem, dessen x-Axe

mit der Richtung von m nach μ zusammenfällt, so erhalten wir für die relative Bewegung die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2x + \frac{mx}{r^3} + \frac{\mu(x-a)}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2y + \frac{my}{r^3} + \frac{\mu y}{\rho^3} = 0,$$

woraus, der Gleichung der lebendigen Kraft entsprechend, folgendes Integral

(4) $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - n^2r^2 - \frac{2m}{r} - \frac{2\mu}{\rho} + h = 0$$

fliesst. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch durch Anwendung der obigen Substitution auf eine von Jacobi gegebene Formel.[1] Die Gleichung (3) bekommt also in unserem Falle die Form

(5) $$n^2r^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\rho} = h.$$

Wenn hierdurch eine Grenzkurve repräsentirt werden soll, ist zunächst erforderlich, dass die Integrationskonstante h einen positiven Wert hat. Hierzu ist aber nach (4) nur nöthig dass entweder die Anfangsgeschwindigkeit nicht zu gross ist oder dass die Anfangswerthe der Abstände r, ρ hinlänglich klein sind. Um die weiteren Bedingungen für die Realität der Kurve zu untersuchen, können wir am besten r und ρ zunächst als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes ansehen. Es ist dabei nur zu bemerken, dass der Umstand, dass die gegenseitigen Abstände ein Dreieck bilden, durch die Ungleichheiten

$$a + r > \rho$$

$$r + \rho > a$$

$$\rho + a > r$$

vertreten werden muss, so wie dass r und ρ nur positive Werthe annehmen können. Es folgt hieraus, dass von allen Punkten der Ebene $r\rho$

[1] *Über Dynamik,* fünfte Vorlesung, Gl. (11).

nur diejenigen in Frage kommen können, welche innerhalb eines durch die Geraden

$$(6)\qquad \begin{aligned} a + r &= \rho \\ r + \rho &= a \\ \rho + a &= r \end{aligned}$$

begrenzten Bandes fallen. Hierzu kommt die Gleichung (5), welche wir zunächst unter der Annahme

$$m = 0$$

ins Auge fassen wollen. Führen wir die Bezeichnungen

$$x^3 = \frac{2\mu}{n^2}; \qquad \alpha^2 = \frac{h}{n^2}$$

ein, so folgt also aus (5)

$$(7)\qquad \begin{aligned} \rho &= -\frac{x^3}{r^2 - \alpha^2} \\ \frac{dr}{d\rho} &= \frac{1}{2x^3}\cdot\frac{(r^2 - \alpha^2)^2}{r}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist es leicht zu sehen, dass die Kurve, welche übrigens in Bezug auf die ρ-Axe symmetrisch sein muss, einen positiven Zweig hat, welcher die Asymptote

$$r = \alpha$$

besitzt und die ρ-Axe in dem Abstande $\frac{x^3}{\alpha^2}$ von dem Origo senkrecht schneidet. Wegen der Gleichung (4) werden nun von der Ebene $r\rho$ alle Punkte ausgeschlossen, welche auf die konkave Seite der Kurve (5) fallen. Je nach den Werthen von a, α und x wird die letztere die Geraden (6) entweder gar nicht treffen oder eine oder mehrere derselben schneiden. — Stellt man sich in dieser Weise die Gleichungen (6) und (7) geometrisch vor und führt man dann das Bild in bipolare Koordinaten über, so erhellt sofort, dass die Bewegung von P entweder in der ganzen Ebene stattfinden kann oder in irgend einer Weise beschränkt ist. Es giebt im letzteren Falle verschiedene Möglichkeiten. Wenn α

oder, was dasselbe ist, h hinreichend gross ist, zerfällt der für die Bewegung abgegrenzte Raum in zwei Gebiete, von welchen das eine, B, sicher den Punkt μ, möglicherweise auch m umschliesst, während das andere, C, sich von dem Unendlichen aus bis zu einer geschlossenen Grenze streckt, welche ausserhalb des Gebietes B fällt. Die beiden Gebiete können für kleinere Werthe von h durch einen Kanal zusammenfliessen, welcher sich um die Verlängerung der Linie von m nach μ eröffnet. Bei abnehmendem h erweitert sich diese Öffnung mehr und mehr und das ausgeschlossene Gebiet der Ebene drängt sich mehr und mehr zusammen, bis von demselben zuletzt nur ein Punkt zurückbleibt. Von da an ist die Bewegung von P ganz unbeschränkt.

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle, wo m von Null verschieden ist, über, so erhält man aus (5), indem noch folgende Bezeichnung

$$k^3 = \frac{2m}{n^2}$$

angewandt wird, zur Diskussion der Kurve die Gleichungen

$$\rho = - x^3 \frac{r}{r^3 - a^2 r + k^3}$$

und

$$\frac{dr}{d\rho} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{(r^3 - a^2 r + k^3)^2}{2r^3 - k^3}.$$

Ein positiver Theil der Kurve existirt nun immer, sobald

$$\left(\frac{a}{k}\right)^6 > \frac{27}{4},$$

und ist zwischen zwei mit der ρ-Axe parallelen Asymptoten eingeschlossen. Nach dem Vorgange der oben angeführten Betrachtung ist es auch in diesem allgemeinen Falle leicht zu sehen, wie sich die Grenzkurve in der Bewegungsebene gestaltet. Für gewisse Werthe der Konstanten zerfällt das Gebiet der Bewegung in drei Theile, von denen zwei, A und B, die Massenpunkte m und μ resp. umschliessen und gegenseitig ausserhalb einander fallen, während das dritte, C, sich, wie im vorigen Falle, von einer rings um A und B geschlossenen Linie nach dem Unendlichen hin erstreckt. Je nach den Umständen können A mit B und B mit dem äusseren Gebiete C zusammenfliessen.

Als Resultat dieser an anderer Stelle[1] näher ausgeführten Diskussion können wir also behaupten, dass solche Werthe der Integrationskonstante h wirklich beigelegt werden können, dass eine stabile Bewegung des Punktes P sowohl in der Nähe von m als in der Umgebung von μ möglich wird. Dies ist auch, was unserer apriorischen Vorstellung von der Sache entspricht, eine Vorstellung welche ohne Zweifel in unseren Erfahrungen auf dem Gebiete der celesten Bewegungen wurzelt.

Die Möglichkeit der vorhergehenden Schlüsse war davon abhängig, dass die Gleichung (3) in jedem Falle nur die Koordinaten eines einzigen Punktes enthielt. Derselbe Umstand ermöglicht nun in der That im folgenden Specialfalle des Dreikörperproblems eine ähnliche Grenzbestimmung. Wir stellen uns ein festes Koordinatensystem vor und nehmen an, dass die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes μ in einem gewissen Augenblicke längs der y-Axe gerichtet ist. Wir denken uns ferner zwei andere Punkte, jeder von der Masse m, deren Lagen und Geschwindigkeiten in demselben Augenblicke in Bezug auf die y-Axe symmetrisch sind. Es ist einleuchtend, dass diese Bedingungen, wenn sie in einem gewissen Momente gelten, auch in jedem beliebigen Augenblicke der Bewegung bestehen bleiben. In Folge dessen nimmt die Gleichung der lebendigen Kraft des Systemes die folgende Gestalt an

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu}{m}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{m}{2x} + h = 0$$

wo man mit x, y die Koordinaten z. B. desjenigen, der beiden symmetrisch gelegenen Punkte, P, welcher rechts von der y-Axe ist, mit y_0 die Koordinate von μ und mit r den gegenseitigen Abstand von P und μ bezeichnet hat. Die Gleichung der Grenzkurve für den Punkt P wird also

$$\frac{2\mu}{r} + \frac{m}{2x} - h = 0$$

oder, wenn man

$$x = r\cos v$$

setzt und die Bezeichnungen

$$\frac{2\mu}{h} = a, \quad \frac{m}{4\mu} = e$$

[1] Bihang till Kongl. Svenska Vetenskapsakademiens handlingar, B. 13, N° 1.

einführt,

$$r = a\left[1 + \frac{e}{\cos v}\right].$$

Diess ist die Gleichung einer Konchoide, welche auf ein mit dem Punkte μ bewegliches Koordinatensystem bezogen ist. Wenn $e > 1$ ist, so existirt nur der offene Zweig, welcher rechts von der y-Axe liegt. Hat man $e < 1$, so giebt es auch links von der y-Axe ein geschlossener Zweig mit einer Spitze im Origo. Wir brauchen aber den letzteren nicht zu betrachten; denn bevor der Punkt P zu der linken Seite der y-Axe übergeht stösst er mit dem symmetrischen Punkte auf der y-Axe selbst zusammen und wir werden die Bewegung nicht länger als bis zu einem solchen Momente verfolgen. Wie es leicht zu sehen ist, findet also die Bewegung von P stets innerhalb desjenigen Gebietes der Ebene statt, welches einerseits von der y-Axe und anderseits von der Konchoide eingeschränkt ist. Der Punkt kann sich mithin zwar unendlich weit von μ entfernen aber nur in die Richtung der y-Axe. Man könnte diess so ausdrücken, dass die Bewegung in der Richtung der x-Axe stabil wäre.

Wenn die Anfangsbedingungen im Dreikörperprobleme ganz beliebig sind, hat man von der Gleichung

$$(8) \qquad m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 - \frac{c}{r} - \frac{c'}{r'} - \frac{c''}{r''} + h = 0$$

auszugehen. In derselben sind $\frac{ds}{dt}, \frac{ds'}{dt}, \frac{ds''}{dt}$ die Geschwindigkeiten der drei Massen m, m', m''; r, r', r'' diejenigen Seiten des von denselben gebildeten Dreiecks, welche m, m', m'' resp. gegenüber stehen; schliesslich haben wir

$$c = 2m'm''$$

$$c' = 2m''m$$

$$c'' = 2mm'$$

gesetzt. Wir stellen jetzt die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} + \frac{c''}{r''} = h$$

auf, welche nach Einführung von der Bezeichnung

(10) $$H' = h - \frac{c'}{r'}$$

auch so geschrieben werden kann

(9') $$\frac{c}{r} + \frac{c''}{r''} = H'.$$

Wenn H' positiv ist, bezeichnet diese Gleichung, wie im Falle von der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Centra, eine lemniskatenähnliche Kurve, welche indessen jetzt einen veränderlichen Parameter enthält und auf die beweglichen Punkte m und m'' als Anfangspunkte der Koordinaten bezogen ist. Setzen wir voraus, dass r' immer zwischen zwei endlichen Grenzen liegt, kann man einen so grossen Werth von h wählen, dass H' stets positiv bleibt. Es existirt somit immer die Kurve (9') und der Gleichung (8) zufolge muss der Punkt m' stets innerhalb derselben bleiben. Die Voraussetzung, dass r' eine obere Grenze hat, kann man aber fallen lassen, indem, für grosse Werthe von r', H' das Zeichen von h erhält, d. h. positiv bleibt. Wenn indessen r' sehr viel anwächst, muss die Kurve (9') schliesslich diejenige ihrer Formen annehmen, welche in zwei um jeden der Punkte m und m'' geschlossenen Gebieten besteht. Wenn h positiv ist und wenn m und m'' sich unendlich weit von einander entfernen, so muss also schliesslich m' in der Nähe von dem einen dieser beiden Punkte bleiben. Ganz allgemein können wir also sagen dass, wenn

$$h > \frac{c'}{r'}$$

ist, so ist die Bewegung von m' entweder in Bezug auf m oder in Bezug auf m'' stabil. Für die Punkte m und m'' kann man nun ganz ähnliche Betrachtungen wie für m' machen. Durch Zusammenstellung derselben schliesst man dann unmittelbar, dass die drei Punkte stets in endlichen Abständen von einander liegen müssen, so lange oder sobald die Beziehungen

(11) $$h > \frac{c}{r}, \qquad h > \frac{c'}{r'}, \qquad h > \frac{c''}{r''}$$

gleichzeitig bestehen. — Diese Betrachtungen können nun in verschiedenen

Weisen variirt werden. An der Stelle der Bedingungen (11) könnte man z. B. auch die folgenden

$$h > \frac{c}{r} - m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2$$

$$h > \frac{c'}{r'} - m''\left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$h > \frac{c''}{r''} - m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m'\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$

treten lassen.

Wenn die gegenseitigen Lagen der drei Punkte so beschaffen sind, dass die Gleichung (9) stattfindet, so ist nach (8) die Geschwindigkeit eines jeden derselben gleich Null. In einem solchen Augenblicke machen ihre Bewegungskurven Spitzen; es ist ja in der That einleuchtend, dass jeder Punkt von diesem Augenblicke an in demselben Weg zurückkehren wird, welchen er vorher, bis zu dem fraglichen Zeitmomente, gefolgt hat. Das Integral der Flächen giebt uns leicht eine Bedingung für die Möglichkeit dieser Art von Bewegung. Wenn die Geschwindigkeiten aller drei Punkte gleichzeitig Null werden, so kann nämlich dem fraglichen Integrale oder der Gleichung

$$mR^2\frac{dv}{dt} + m'R'^2\frac{dv'}{dt} + m''R''^2\frac{dv''}{dt} = k$$

nur in dem Falle Genüge geleistet werden, wenn die Konstante der Flächen, k, selbst gleich Null ist. Diess ist nun eine Bedingung, welche in dem oben angeführten Specialfalle des Dreikörperproblems stattfindet, die aber z. B. im Sonnensysteme, wo alle Bewegungen in derselben Richtung vor sich gehen, nicht erfüllt ist.

Wir haben bei den angeführten Beispielen alle Bewegungen als in der Ebene stattfindend angenommen. Es ist aber leicht einzusehen, dass diess eine unwesentliche Beschränkung war und dass die Schlüsse ebenso leicht in drei Dimensionen gemacht werden können. Die aufgestellten Grenzkurven werden dann durch solche Grenzflächen ersetzt, die durch die Drehung der vorigen um ihre resp. Symmetrieaxen entstehen. Dass die Schlüsse ebenso leicht für andere Attraktionsgesetze als das Newton'sche gemacht werden können, ist auch ohne weiteres klar.

Bevor wir diese Mittheilung abschliessen, wollen wir noch ein Paar Worte über die Anwendung der angeführten Betrachtungsweise bei einer speciellen Aufgabe der Störungstheorie zufügen, nämlich bei der Untersuchung über die Existenz der s. g. Libration in der Länge eines Planeten. Bekanntlich wird die gestörte mittlere Länge, ζ, eines Planeten durch Annäherungen bestimmt, deren Grundlage folgende Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(i\zeta - i'\zeta' + A_{i,i'}) \tag{12}$$

bildet. Hier bedeutet ζ' die mittlere Länge des störenden Planeten; die $A_{i,i'}$ wie die $\alpha_{i,i'}$ sind von den Elementen abhängige Grössen, von welchen die letzteren mit der störenden Masse multiplicirt sind; i und i' nehmen die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen an. Setzt man die störende Masse gleich Null, so erhält man

$$\zeta = nt + c$$

wo n und c die elliptischen Integrationskonstanten bezeichnen, n die »mittlere Bewegung» und c die »mittlere Epochenlänge». Ebenso erfolgt für den störenden Planeten

$$\zeta' = n't + c'.$$

Diese beiden Ausdrücke werden nun als Anfangswerthe benutzt, welche man in der rechten Seite von (12) einsetzt. Man erhält so

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\sum \alpha_{i,i'} \sin(int - i'n't + ic - i'c' + A_{i,i'})$$

woraus man durch directe Integration als erste Annäherung

$$\zeta = nt + c + \sum \frac{\alpha_{i,i'}}{(in - i'n')^2} \sin(int - i'n't + ic - i'c' + A_{i,i'}) \tag{13}$$

bekommt. Die zweite Annäherung erfolgt durch Einsetzung von eben diesem Ausdrucke und dem entsprechenden für ζ' in (12), u. s. w. Bei der ersten Annäherung sind die $\alpha_{i,i'}$ und $A_{i,i'}$ als Konstanten zu betrachten. Wir werden sie auch hier, wo es sich nur um ein typisches Beispiel han-

delt, als solche ansehen. Im allgemeinen sind sie doch veränderlich und zwar müssen aus dieser Ursache in einer beliebigen Annäherung statt der $A_{i,i'}$ Ausdrücke von der Form $\sigma_{i,i'}t + A_{i,i'}$ in den Argumenten von (12) auftreten, wo die $\sigma_{i,i'}$ kleine von den Bewegungen der Apsiden und Knoten abhängige Koefficienten sind. In einer neuen Abhandlung[1] über eben diese Fragen hat Herr GYLDÉN auf diese Verallgemeinerung Rücksicht genommen.

Es kann nun aber bekanntlich die angeführte Folge der Annäherungen divergent werden. Die Ursache hievon ist der Umstand, dass die n und n' zwei ganzen Zahlen i'_0 und i_0 so nahe proportional sind, dass die entsprechenden Koefficienten in (13)

$$\frac{\alpha_{i_0,i'_0}}{(i_0 n - i'_0 n')^2}$$

sehr grosse Werthe annehmen. Wie diese Wirkung der kleinen Divisoren $(i_0 n - i'_0 n')$ durch Vorhandensein der s. g. *Libration* kompensirt werden kann, hat Herr GYLDÉN vor längerer Zeit gezeigt und in der citirten Abhandlung näher auseinandergesetzt.

Die typische Form der bezüglichen Annäherungsmetode könnte in folgender Weise dargestellt werden.

Man geht von der nachstehenden Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\Sigma\alpha_{i,i'}\sin(i\zeta - i'n't + A_{i,i'})$$

aus. Vorausgesetzt, dass

$$\zeta = nt + c + P$$

ist, wo P nur periodische Glieder enthält, so geht dieselbe in die folgende

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -\Sigma\alpha_{i,i'}\sin(int - i'n't + ic + iP + A_{i,i'})$$

über. Führt man hier statt P eine Grösse V ein, welche durch folgende Gleichung definirt ist

$$(14) \qquad 2V = i_0 nt - i'_0 n't + i_0 c + i_0 P + A_{i_0,i'_0},$$

[1] *Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden.* Acta mathematica 9, p. 185—294.

wo i_0 und i'_0 einem kritischen Gliede entsprechen, so erhält man zur Bestimmung von V die Gleichung

$$(14') \qquad 2\frac{d^2V}{dt^2} = -\sum i_0 \alpha_{i,i'} \sin(int - i'n't + ic + iP + A_{i,i'}).$$

Vernachlässigt man hier alle Glieder ausser demjenigen, welches den ganzen Zahlen i_0 und i'_0 entspricht, so erhält man, wenn noch

$$\alpha^2 = i_0 \alpha_{i_0,i'_0}$$

gesetzt wird, die folgende Gleichung

$$(15) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = -\alpha^2 \sin V \cos V,$$

woraus nach einmaliger Integration

$$(16) \qquad \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \sin^2 V$$

kommt. Es bedeutet hier γ^2 die Integrationskonstante. Diese Gleichung bestimmt V als eine elliptische Function von t mit dem Modul

$$k = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Je nach dem Werthe von k, mithin von der Integrationskonstante γ, ist nun die Entwicklung von V verschieden. Wenn

$$k < 1$$

ist, so enthält die Entwicklung von V, wie in (14) vorausgesetzt ist, wirklich ein sekulares Glied, dessen von k abhängiger Koefficient dem Werthe von $i_0 n - i'_0 n'$ gleich sein muss. Von den Grössen γ und n kann man also in diesem Falle nach Belieben die eine oder die andere als die unabhängige Konstante ansehen. Im Falle dagegen, wo

$$k > 1$$

ist, kann die Entwicklung von V nur periodische Glieder enthalten. Nach (14) muss also die Gleichung

$$(17) \qquad i_0 n - i'_0 n' = 0$$

genau erfüllt sein. Das hierdurch ausgesagte Verhältniss ist es, was man Libration nennt. Die mittlere Bewegung n bleibt also in diesem Falle nicht willkürlich, sondern muss so bestimmt werden, dass zwischen n und n' eine vollständige Kommensurabilität herrscht. Die willkürliche Konstante tritt stattdem in dem Koefficienten eines periodischen Gliedes auf.

Diese Schlüsse, welche durch Anwendung bekannter Reihenentwicklungen der elliptischen Functionen gefolgert werden, lassen sich nun auch, durch Anwendung unserer mehrerwähnten Betrachtung auf die Gleichung (16), ohne weiteres machen. Bei diesem Verfahren ist man auch keineswegs auf die beiden Glieder an der rechten Seite von (16) beschränkt, sondern man kann aus (14') auf einmal alle Glieder mitnehmen, welche nur von V abhängen. Auf solche Weise tritt an die Stelle von (16) eine Gleichung

$$(18) \qquad \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = F(V)$$

wo $F(V)$ ausser der Integrationskonstante ein Aggregat von periodischen Gliedern enthält.

Es sei nun $F(V)$ eine beliebige Function, welche so beschaffen ist, dass die Gleichung

$$(19) \qquad F(V) = 0$$

zwei reelle Wurzeln, V_0 und V_1 besitzt. Es wird ferner angenommen, dass zwischen diesen Wurzeln keine dritte Wurzel liegt und dass $F(V)$ eine positive Grösse ist für Werthe von V zwischen V_0 und V_1. Wenn die Anfangsbedingungen so beschaffen sind, dass, für $t = 0$, V zwischen V_0 und V_1 liegt, so folgt aus den Voraussetzungen, dass V für immer zwischen diesen Grenzen in einem Zustande von Libration bleiben muss, wenigstens insofern die Gleichungen

$$F'(V_0) = 0, \qquad F'(V_1) = 0$$

nicht gleichzeitig mit

$$F(V_0) = 0, \qquad F(V_1) = 0$$

bestehen. Denn für Werthe von V, welche unmittelbar ausserhalb den

Grenzen V_0 und V_1 liegen, würde die Function $F(V)$ negative Werthe annehmen, was nach (18) nicht zulässig ist. — Wenn dagegen die Gleichung (19) keine reellen Wurzeln hat, so muss ja in der That V mit t entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen. — In dem Falle, dass $F(V)$ gleich einer periodischen Function

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos V + \ldots$$
$$+ \beta_1 \sin V + \ldots$$

wäre, ist es hinreichend die Wurzeln, welche zwischen o und 2π fallen, zu untersuchen. Aus der Periodicität der Function $F(V)$ folgt ausserdem dass, wenn V_0 eine zwischen o und 2π liegende Wurzel der Gleichung

$$F(V) = 0$$

ist, zwischen diesen Grenzen wenigstens noch *eine* Wurzel V_1 liegen muss, vorausgesetzt dass

$$F'(V_0) \gtrless 0$$

ist.

Mit Anwendung von einem durch Herrn Weierstrass gegebenen Verfahren,[1] ist es leicht zu zeigen, dass für den Fall, wo die Gleichung (19) zwei Wurzeln V_0 und V_1 hat, V als eine periodische Function von t darstellbar ist.

Angenommen, dass V_0 und V_1 zwei auf einander folgende reelle Wurzeln der Gleichung

$$F(V) = 0$$

sind, dass aber $F'(V)$ für diese Werthe nicht verschwindet, so folgt, dass

$$F(V) = (V - V_0)(V_1 - V)F_1(V)$$

ist, wo $F_1(V)$ weder für die Werthe V_0, V_1 noch für die dazwischenliegenden Werthe von V Null werden kann. Da nun, wenn der Anfangs-

[1] Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Februar 1866.

werth von V zwischen V_0 und V_1 liegt, nach dem Angeführten folgt, dass folgende Relationen immer bestehen müssen

$$V_0 \leqq V \leqq V_1,$$

so ist man berechtigt, statt V eine neue Veränderliche v, durch die folgende Gleichung einzuführen:

$$V = \alpha + \beta \cos v,$$

wo

$$\alpha = \frac{V_0 + V_1}{2}, \qquad \beta = \frac{V_0 - V_1}{2}.$$

Man erhält nun

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \beta^2 \sin^2 v \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

und anderseits

$$(V - V_0)(V_1 - V) = \beta^2 \sin^2 v,$$

so dass aus (18)

$$(20) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = F_1(\alpha + \beta \cos v)$$

folgt. Da die rechte Seite für alle Werthe von v sicher nie Null wird, so muss, dieser Gleichung gemäss, v mit t entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen, und zwar so, dass wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht, v zwischen denselben Grenzen läuft. Es ist also sowohl v eine eindeutige Function $\mathfrak{v}(t)$ von t, als umgekehrt t eine eindeutige Function $\mathfrak{t}(v)$ von v.

Es ist nun

$$\frac{d\mathfrak{t}(v)}{dv} = \frac{1}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} = \frac{d\mathfrak{t}(v + 2\pi)}{dv},$$

$$(21) \qquad \mathfrak{t}(v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}},$$

folglich

$$(22) \qquad \mathfrak{t}(v + 2\pi) = \mathfrak{t}(v) + 2\omega$$

indem 2ω eine gewisse Konstante bezeichnet. Hieraus erhält man

$$\mathfrak{v}(t+2\omega)=\mathfrak{v}(t)+2\pi$$

und also

$$\cos[\mathfrak{v}(t+2\omega)]=\cos\mathfrak{v}(t).$$

Man sieht also, dass $\cos v$, und somit auch V, eine periodische Function von t ist mit der Periode 2ω. Um die letztere zu bestimmen setzen wir in (22)

$$v=-\pi.$$

Dann erhält man

$$\mathfrak{t}(\pi)=\mathfrak{t}(-\pi)+2\omega$$

und bedenkt man jetzt, dass nach (21)

$$\mathfrak{t}(-\pi)=-\mathfrak{t}(\pi),$$

so folgt

$$\omega=\mathfrak{t}(\pi)=\int_0^\pi\frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha+\beta\cos v)}}=\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{\sqrt{F(V)}}.$$

Als eine überall endliche periodische Function von t, welche ausserdem gerade ist, kann $\cos v$ in folgender Weise entwickelt werden

$$\cos v=A_0+A_1\cos u+A_2\cos 2u+\ldots,$$

wo

$$u=\frac{\pi}{\omega}t$$

ist. Zur Bestimmung der Koefficienten haben wir Gleichungen von der Form

$$(23)\qquad \pi A_n=\int_0^\pi\cos v\cos nu\,du$$

oder, da

$$du = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}$$

ist

$$\omega A_n = \int_0^\pi \cos v \cdot \cos \left[\frac{n\pi}{\omega} \cdot \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} \right] \cdot \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}.$$

Statt dieser Formel, kann man auch die aus (23) durch partielle Integration abzuleitende

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \cdot \int_0^\pi \sin \left[n \frac{\pi}{\omega} \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} \right] \sin v \, dv$$

benutzen. Das Integral

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}$$

kann man sich in folgender Weise bestimmt denken. Da die Function

$$\frac{1}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}}$$

eine überall endliche, gerade, und periodische Function ist, so lässt sich dieselbe folgendermassen entwickeln

$$\frac{1}{F_1(\alpha + \beta \cos v)} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \alpha_2 \cos 2v + \ldots,$$

und die Koefficienten sind durch die Formel

$$\pi \alpha_n = \int_0^\pi \frac{\cos n v}{F_1(\alpha + \beta \cos v)} dv$$

bestimmt.

Dieselben kann man also immer, wenigstens durch mechanische Quadratur, berechnen. Hiernach ergiebt sich

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F_1(\alpha + \beta \cos v)}} = \alpha_0 v + \alpha_1 \sin v + \frac{\alpha_2}{2} \sin 2v + \dots.$$

Die Koefficienten A_n lassen sich sodann bestimmen entweder durch mechanische Quadratur oder auch analytisch mittels Entwicklungen nach Cylinderfunctionen.

ZUR THEORIE DER KRUMMEN OBERFLÄCHEN

VON

R. LIPSCHITZ
in BONN.

Vor einiger Zeit wurde ich veranlasst, mich mit der Frage nach denjenigen Oberflächen zu beschäftigen, bei welchen die Differenz der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte denselben Werth hat. Die Methode zur Behandlung derartiger Aufgaben, welche von mir in den *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. 14. December 1882 und 8. Februar 1883) entwickelt ist, giebt für die erwähnte Forderung eine angemessene Formulirung, und erlaubt, alle Oberflächen aufzusuchen, welche dieser Forderung und ausserdem noch einer gewissen Beschränkung genügen. Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer solchen Oberfläche lassen sich mit Hülfe von elliptischen Integralen als Functionen von zwei unabhängigen Elementen darstellen. Nachdem Herr HERMITE die Güte gehabt hat, die Ausdrücke in den Comptes rendus der Pariser Akademie v. 14. Februar 1887, S. 418,[1] mitzutheilen, erlaube ich mir, die Ableitung hier folgen zu lassen.

Wie in der angeführten Abhandlung denkt man sich in jedem Punkte der zu betrachtenden nicht abwickelbaren Oberfläche die Normale construirt, und werden die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ des zu der Normale gehörenden Punktes einer GAUSS'schen Kugel vermöge der Gleichungen

$$\xi = \cos\vartheta, \qquad \eta = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \zeta = \sin\vartheta\sin\varphi$$

[1] Vgl. Comptes rendus v. 21 Februar 1887, S. 534.

Acta mathematica. 10. Imprimé le 10 Juin 1887.

durch die unabhängigen Polarcoordinaten ϑ und φ ausgedrückt; es erstreckt sich ϑ von o bis π, φ von o bis 2π. Für einen Punkt der Oberfläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, bezeichnen ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien, und wird die Lage der Hauptkrümmungsrichtungen durch den Stellungswinkel σ bestimmt. Zieht man durch den Punkt (x, y, z) eine Parallele zu der x-Axe, und projicirt jene auf die Tangentialebene, so bedeutet σ den Winkel, welchen die betreffende Projection mit der zu ρ_1 gehörenden Hauptkrümmungsrichtung bildet. Alsdann werden ρ_1, ρ_2, σ als Functionen der Variabeln ϑ und φ aufgefasst, und die a. a. O. in III mit (26) bezeichnete Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial[\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\varphi}+i\cos\vartheta[\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}] = i\frac{\partial[\rho_1+\rho_2-(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\vartheta},$$

in welcher $i=\sqrt{-1}$ ist, enthält die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Oberfläche existirt, zu welcher die Functionen ρ_1, ρ_2, σ gehören. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche ergeben sich hierauf durch die Integration der a. a. O. in III, (27) aufgestellten Differentiale dx, dy, dz, bei welchen die Bedingungen der Integrabilität in Folge der befriedigten partiellen Differentialgleichung erfüllt sind. Die Ausdrücke von dx, dy, dz lassen sich nach I, (32) der Abhandlung *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. 10. Mai 1883) beziehungsweise als die reellen Theile der folgenden Verbindungen darstellen, —

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &-\sin\vartheta\Big(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\Big),\\ &(\cos\vartheta\cos\varphi+i\sin\varphi)\Big(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\Big),\\ &(\cos\vartheta\sin\varphi-i\cos\varphi)\Big(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\Big).\end{aligned}\right.$$

Um in der Gleichung (1) die Bestandtheile von einander zu trennen, in welchen die Summe, und diejenigen, in welchen die Differenz der

Hauptkrümmungsradien vorkommt, kann man dieselbe, nachdem sie mit $\sin\vartheta$ multiplicirt ist, in die folgende Gestalt bringen

$$(3)\qquad \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi}\sin\vartheta - i\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta$$
$$+\frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi}+i\frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta}=0.$$

Demnach liefert die Trennung des Reellen und Imaginären die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi}\sin\vartheta = -\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos2\sigma\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi}-\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta = \dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta}-\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin2\sigma\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi}. \end{cases}$$

Da die nach ϑ und φ genommenen partiellen Differentialquotienten der Summe $(\rho_1+\rho_2)$ durch die partiellen Differentialquotienten der Verbindungen $(\rho_1-\rho_2)\cos2\sigma$ und $(\rho_1-\rho_2)\sin2\sigma$ ausgedrückt sind, so leuchtet ein, dass, wenn zu der Bestimmung einer Oberfläche nur die beiden letzteren als Functionen von ϑ und φ gegeben sind, die für die Existenz der Oberfläche nothwendige und hinreichende Bedingung in einer einzigen, nur reelle Grössen enthaltenden partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung besteht, welche feststellt, dass für das aus (4) abzuleitende Differential der Summe $(\rho_1+\rho_2)$ die Bedingung der Integrabilität erfüllt ist. Bei denjenigen Oberflächen, in welchen die Differenz $(\rho_1-\rho_2)$ constant ist, und die gegenwärtig ins Auge gefasst werden sollen, wird durch die so eben erwähnte partielle Differentialgleichung angegeben, in welcher Abhängigkeit der Stellungswinkel σ von den Variabeln ϑ und φ stehen muss, und sobald diese partielle Differentialgleichung erfüllt ist, erhält man zuerst $(\rho_1+\rho_2)$ und darauf x, y, z, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Oberfläche, durch die Integration vollständiger Differentiale.

Ich suche jetzt die Oberflächen zu ermitteln, für welche die Differenz $(\rho_1-\rho_2)$ constant ist, ferner der Stellungswinkel σ nicht von der

Variable φ und nur von der Variable ϑ abhängt. Dann gehen die partiellen Differentialgleichungen (4) in die folgenden über

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta} = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\,\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta}, \end{cases}$$

und die Bedingung der Integrabilität für das Differential $d(\rho_1+\rho_2)$ besteht in der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche die Abhängigkeit des Stellungswinkels σ von der Variable ϑ charakterisirt

$$(6)\quad \frac{d\left(\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{d[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{d\vartheta}\right)}{d\vartheta} = 0.$$

Die Grösse $(\rho_1-\rho_2)$ bildet, da sie constant ist, einen fortzulassenden Factor. Mit Hülfe von zwei willkürlichen Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ ergiebt sich sofort die vollständige Integration

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{d(\sin 2\sigma\sin^2\vartheta)}{d\vartheta} = -\mathfrak{M}, \\[2ex] \sin 2\sigma\sin^2\vartheta = \mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta. \end{cases}$$

Hieraus folgt, indem

$$(8)\quad \sin^4\vartheta - (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta)^2 = F(\cos\vartheta)$$

gesetzt wird

$$(9)\quad \cos 2\sigma\sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)}.$$

Wegen der Gleichungen (5) erhält die Summe $(\rho_1+\rho_2)$ den Ausdruck

$$(10)\quad \rho_1+\rho_2 = (\rho_1-\rho_2)\left(\int\frac{d(\cos 2\sigma\sin^2\vartheta)}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right),$$

wo bei der auszuführenden Integration eine additive willkürliche Constante hinzukommt. Indem man über diese so wie über die schon eingeführten Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ auf alle zulässigen Arten verfügt, wird die Gesammtheit der Oberflächen, welche den aufgestellten Forderungen entsprechen, erschöpft.

Das in (10) vorkommende Integral kann durch theilweise Integration so umgeformt werden

$$(11)\qquad \int \frac{d(\cos 2\sigma \sin^2\vartheta)}{d(\cos\vartheta)} \frac{d(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} = \cos 2\sigma + 2\int \cos 2\sigma \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta$$
$$= \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + 2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta} \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Vermöge dessen bekommen die Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche beziehungsweise die Ausdrücke

$$(12)\quad \begin{cases} dx = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Big\{ -\Big(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\Big)\sin\vartheta\, d\vartheta \\ \qquad + (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta)\, d\varphi \Big\}, \\ dy = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Big\{\Big[\Big(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\Big)\cos\vartheta\cos\varphi \\ \qquad + \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\sin\varphi\Big] d\vartheta + \Big[-\Big(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M}\varphi\Big)\sin\varphi \\ \qquad - \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi\Big]\sin\vartheta\, d\varphi\Big\}, \\ dz = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Big\{\Big[\Big(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\Big)\cos\vartheta\sin\varphi \\ \qquad - \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\varphi\Big] d\vartheta + \Big[\Big(2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M}\varphi\Big)\cos\varphi \\ \qquad - \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi\Big]\sin\vartheta\, d\varphi\Big\}. \end{cases}$$

Durch die Integration wird ausser dem auf der rechten Seite von (11) erscheinenden elliptischen Integrale noch ein zweites eingeführt; der Kürze halber will ich dieselben so bezeichnen

$$(13)\qquad \int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = P, \qquad \int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\, d\vartheta = Q.$$

Auf diese Weise entstehen für x, y, z die Darstellungen

$$(14)\quad \begin{cases} x = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}[(2P + \mathfrak{M}\varphi)\cos\vartheta - 2Q + \mathfrak{L}\varphi] \\ y = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left((2P + \mathfrak{M}\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{\mathfrak{L}\cos\vartheta + \mathfrak{M}}{\sin\vartheta}\sin\varphi\right) \\ z = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left((2P + \mathfrak{M}\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\mathfrak{L}\cos\vartheta + \mathfrak{M}}{\sin\vartheta}\cos\varphi\right), \end{cases}$$

und ρ_1, ρ_2, σ sind durch die Gleichungen bestimmt

$$(15)\quad \begin{cases} \sin 2\sigma \sin^2\vartheta = \mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta \\ \cos 2\sigma \sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)} \\ \rho_1 + \rho_2 = (\rho_1 - \rho_2)\left(2P + \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right). \end{cases}$$

Die beiden mit P und Q bezeichneten Integrale unterscheiden sich insofern von einander, als für die besondern Werthe der Constanten $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{M} \gtrless 0$ und $\mathfrak{L} \gtrless 0$, $\mathfrak{M} = 0$ das erstere die Eigenschaft, ein elliptisches Integral zu sein, verliert, während das zweite dieselbe beibehält.

Bei der Voraussetzung, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig verschwinden, wird

$$F(\cos\vartheta) = \sin^4\vartheta,$$

mithin

$$P = \int \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta = \log\sin\vartheta + \mathfrak{A},$$

$$Q = \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta + \mathfrak{B},$$

und daher nehmen x, y, z die Gestalt an

$$(16)\quad \begin{cases} x = (\rho_1 - \rho_2)\left((\log\sin\vartheta + \mathfrak{A})\cos\vartheta - \log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - \mathfrak{B}\right) \\ y = (\rho_1 - \rho_2)(\log\sin\vartheta + \mathfrak{A})\sin\vartheta\cos\varphi \\ z = (\rho_1 - \rho_2)(\log\sin\vartheta + \mathfrak{A})\sin\vartheta\sin\varphi. \end{cases}$$

Hier ist die betreffende Oberfläche eine Rotationsfläche.

Bonn d. 4. April 1887.

BEWEIS EINES SATZES AUS DER THEORIE DER SUBSTITUTIONEN

VON

R. LIPSCHITZ
in BONN.

In der Abhandlung *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* (Journal für Mathematik, Bd. 47, S. 312) hat Herr HERMITE den Satz ausgesprochen, dass, wenn eine Substitution dreier Variabeln nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution hervorbringt, die zu der Substitution gehörende mit einer unbestimmten Grösse s gebildete charakteristische Determinante nur für solche Werthe von s verschwinden kann, die gleich μ^{ten} Wurzeln der Einheit sind. Dieser Satz ist von Herrn CAMILLE JORDAN in dem *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 112) in der folgenden Weise auf Substitutionen von beliebig vielen Variabeln ausgedehnt worden. Jede Substitution von n Variabeln

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

welche nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeugt, kann in die kanonische Gestalt

$$(2)\qquad t_1 = \omega_1 u_1, \quad t_2 = \omega_2 u_2, \quad \ldots, \quad t_n = \omega_n u_n$$

gebracht werden, wo die sämmtlichen Constanten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, unter denen mehrere einander gleich oder auch alle von einander verschieden sein können. Den bei der Verwandlung von (1) in die kanonische Gestalt anzuwendenden Transformationen entsprechen solche Transformationen der zu (1) gehörenden bilinearen Form

$$(3) \qquad (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)z_1 + \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)z_n,$$

durch welche die bilineare Form

$$(4) \qquad y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n$$

in sich selbst übergeht. Wenn für die Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \ldots + g_{1n}u_n \\ y_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \ldots + g_{2n}u_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = g_{n1}u_1 + g_{n2}u_2 + \ldots + g_{nn}u_n \end{cases}$$

benutzt wird, und man das zu g_{hk} gehörende, durch die von Null verschiedene Determinante $|g_{hk}|$ dividirte adjungirte Element mit G_{hk} bezeichnet, so muss für die Variabeln z_h die Substitution gebraucht werden

$$(6) \qquad \begin{cases} z_1 = G_{11}w_1 + G_{12}w_2 + \ldots + G_{1n}w_n \\ z_2 = G_{21}w_1 + G_{22}w_2 + \ldots + G_{2n}w_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n = G_{n1}w_1 + G_{n2}w_2 + \ldots + G_{nn}w_n, \end{cases}$$

damit die vorgeschriebene Gleichung

$$(7) \qquad y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n = u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n$$

entsteht. Bildet man dagegen die Gleichung

$$(8) \qquad (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)z_1 + \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)z_n$$
$$= (c_{11}u_1 + \ldots + c_{1n}u_n)w_1 + \ldots + (c_{n1}u_1 + \ldots + c_{nn}u_n)w_n,$$

so leuchtet ein, dass die mit der rechten Seite correspondirende Substitution

$$(9)\quad \begin{cases} t_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1n}u_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_n = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \dots + c_{nn}u_n \end{cases}$$

hervorgebracht wird, indem man zuerst die zu (5) gehörende inverse Substitution

$$(10)\quad \begin{cases} t_1 = G_{11}x_1 + G_{21}x_2 + \dots + G_{n1}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_n = G_{1n}x_1 + G_{2n}x_2 + \dots + G_{nn}x_n, \end{cases}$$

hierauf (1) und zuletzt (5) anwendet. Unter der Voraussetzung des von Herrn Camille Jordan herrührenden Satzes muss die Substitution (5) so eingerichtet sein, dass (9) die Gestalt von (2) annimmt. Da nun (2) nach μ-facher Wiederholung unzweifelhaft die identische Substitution liefert, so erkennt man leicht, dass, wenn eine Substitution (1) in die kanonische Gestalt (2) gebracht werden kann, auch umgekehrt (1) die Eigenschaft haben muss, nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution zu erzeugen. Mithin folgt aus dem angeführten Satze des Herrn Camille Jordan, dass eine Substitution (2) die genannte Eigenschaft hat oder nicht hat, je nachdem sie in die kanonische Gestalt (2) verwandelt werden kann oder nicht.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeuge, können auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Zu der Substitution (2) gehört die mit einer unbestimmten Grösse s gebildete charakteristische Determinante

$$(\omega_1 - s)(\omega_2 - s)\dots(\omega_n - s),$$

und dieselbe ist ausserdem so beschaffen, dass alle ihre Elementartheiler von der ersten Ordnung sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass der grösste gemeinsame Theiler aller partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$

Ordnung, durch die Determinante dividirt, einen Bruch liefert, dessen Zähler constant ist, und dessen Nenner nur verschiedene lineare Functionen von s als Factoren enthält. Sobald eine Substitution (1) in die kanonische Form (2) gebracht werden kann, verwandelt sich die mittelst der unbestimmten Grösse s aus (3) und (4) gebildete bilineare Form

$$(11)\qquad (a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n)z_1+\ldots+(a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n)z_n-s(y_1z_1+\ldots+y_nz_n)$$

durch die Substitutionen (5) und (6) in die bilineare Form

$$(12)\qquad \omega_1u_1w_1+\ldots+\omega_nu_nw_n-s(u_1w_1+\ldots+u_nw_n),$$

Weshalb die zu (11) gehörende Determinante

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12}\quad, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}\quad, & a_{22}-s, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\quad, & a_{n2}\quad, & \ldots; & a_{nn}-s \end{vmatrix}$$

ebenfalls die angeführten Eigenschaften der obigen Determinante

$$(\omega_1-s)(\omega_2-s)\ldots(\omega_n-s)$$

besitzt. Auch folgt unmittelbar aus den Principien der Abhandlung, in welcher Herr WEIERSTRASS den Begriff der Elementartheiler eingeführt hat, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, (Monatsbericht der Berliner Akademie v. 18 Mai 1868, S. 314), dass, wenn die bezeichneten Determinanten in ihren Elementartheilern übereinstimmen, die bilineare Form (11) in die Form (12) transformirt werden kann. Hiernach ist es gestattet, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution liefert, so auszusprechen, dass die Determinante (13) nur für solche Werthe von s, die μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, verschwinde, und dass ihre sämmtlichen Elementartheiler von der ersten Ordnung seien.[1] Der zweiten Bedingung kann man nach einer oben gemachten Bemerkung

[1] S. H. MINKOWSKI, *Über den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen*, Journal für Mathematik, Bd. 100, S. 450.

auch den Ausdruck geben, dass der grösste gemeinsame Theiler der sämmtlichen partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, durch die Determinante dividirt, gleich einem Bruche wird, dessen Zähler constant und dessen Nenner gleich einem Product aus linearen Functionen von s ist, die alle unter einander verschieden sind.

Die Kriterien für die in Rede stehende Eigenschaft einer Substitution von n Variabeln lassen sich, wie ich jetzt zeigen werde, in der zuletzt erwähnten Fassung durch sehr einfache Betrachtungen zur Evidenz bringen, bei denen von der Zerlegung der rationalen ganzen Functionen einer Veränderlichen in Factoren des ersten Grades kein Gebrauch gemacht wird.

Es möge eine gegebene Substitution (1) in μ-facher Wiederholung zur Anwendung kommen, indem man die nach einander einzuführenden Systeme von je n Variabeln mit $x_h, y_h, y_h^{(2)}, \ldots, y_h^{(\mu)}$ bezeichnet. Alsdann ergiebt das System (1) mit Benutzung einer unbestimmten Grösse s das System von Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} x_1 - sy_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n - sy_1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n - sy_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n - sy_n, \end{cases}$$

und ebenso entsteht nach einander eine Reihe von Systemen, dessen erstes ich hinschreibe

$$(15)\qquad \begin{cases} y_1 - sy_1^{(2)} = a_{11}y_1^{(2)} + a_{12}y_2^{(2)} + \ldots + a_{1n}y_n^{(2)} - sy_1^{(2)} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n - sy_n^{(2)} = a_{n1}y_1^{(2)} + a_{n2}y_2^{(2)} + \ldots + a_{nn}y_n^{(2)} - sy_n^{(2)}. \end{cases}$$

Wenn man nun das System (15) mit s, die auf dasselbe folgenden beziehungsweise mit $s^2, s^3, \ldots, s^{\mu-1}$ multiplicirt, alle addirt, und die Abkürzung

$$(16)\qquad \eta_h = y_h + sy_h^{(2)} + \ldots + s^{\mu-1}y_h^{(\mu)}$$

einführt, so erhält man das System von Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} x_1 - s^\mu y_1^{(\mu)} = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \dots + a_{1n}\eta_n - s\eta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n - s^\mu y_n^{(\mu)} = a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \dots + a_{nn}\eta_n - s\eta_n. \end{cases}$$

Ich mache jetzt die Voraussetzung, dass die Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeuge, oder, dass, in den eingeführten Bezeichnungen, die Gleichungen

$$(18)\qquad y_1^{(\mu)} = x_1, \quad \dots, \quad y_n^{(\mu)} = x_n$$

gelten. Dadurch wird aus (17) das System

$$(19)\qquad \begin{cases} (1 - s^\mu)x_1 = (a_{11} - s)\eta_1 + a_{12}\eta_1 + \dots + \qquad a_{1n}\eta_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (1 - s^\mu)x_n = \qquad a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \dots + (a_{nn} - s)\eta_n. \end{cases}$$

Weil nun die n Verbindungen η_h nach (16) gleich homogenen linearen Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \dots, y_n$ sind, welche folgendermassen ausgedrückt werden sollen,

$$(20)\qquad \eta_h = q_{h1}y_1 + q_{h2}y_2 + \dots + q_{hn}y_n,$$

so kann durch das System (19) für jeden Werth von s, welcher den Ausdruck $(s^\mu - 1)$ nicht zum Verschwinden bringt, nur diejenige Abhängigkeit der Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ von den Variabeln $y_1, y_2, \dots, y_n$ dargestellt werden, welche ursprünglich in (1) ausgedrückt ist; oder, wenn jede der Gleichungen in (19) durch $(1 - s^\mu)$ dividirt wird, so müssen die auf der rechten Seite befindlichen homogenen linearen Functionen von $y_1, y_2, \dots, y_n$ respective mit denjenigen identisch sein, die in (1) auftreten. Wenn man daher die in (13) dargestellte Determinante mit $\mathfrak{F}(s)$, die zu dem System (20) gehörende Determinante $|q_{hk}|$ mit $\mathfrak{Q}(s)$, die zu der Substitution (1) gehörende $|a_{hk}|$ mit A bezeichnet, so folgt aus der hervorgehobenen Übereinstimmung zwischen (1) und (19) die Gleichung

$$(20')\qquad A(1 - s^\mu)^n = \mathfrak{F}(s)\mathfrak{Q}(s).$$

Die Determinante A muss wegen der Gleichungen (18) so beschaffen sein, dass

(21) $$A^{\mu} = 1$$

ist. Die Gleichung (20′) zeigt, dass $\mathfrak{F}(s)$ nur für solche Werthe von s verschwinden kann, die μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, wie behauptet war, und giebt gleichzeitig an, wie die Determinante $\mathfrak{Q}(s)$ durch $\mathfrak{F}(s)$ bestimmt wird.

Wenn man annimmt, dass die Determinante $\mathfrak{F}(s)$ so gebildet werde, als ob die Elemente a_{hk} von einander unabhängig wären, so kann man die zu (13) gehörenden partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung als partielle Differentialquotienten von $\mathfrak{F}(s)$ nach den a_{hk} darstellen, und erhält aus (19) durch Auflösung für die Verbindungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ die Ausdrücke

(22) $$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = \dfrac{\dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{11}}x_1 + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{21}}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{n1}}x_n}{\mathfrak{F}(s)}(1-s^{\mu}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta_n = \dfrac{\dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{1n}}x_1 + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{2n}}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{nn}}x_n}{\mathfrak{F}(s)}(1-s^{\mu}). \end{array}\right.$$

Nach (16) sind die η_h gleich homogenen linearen Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deren Coefficienten ganze Functionen der unbestimmten Grösse s sind; sie verwandeln sich durch Anwendung von (1) in homogene lineare Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von s sind. Diese Coefficienten finden sich auf der rechten Seite von (22) individuell dargestellt. Mithin muss jeder der n^2 Ausdrücke

$$\frac{\dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{hk}}}{\mathfrak{F}(s)}(1-s^{\mu})$$

gleich einer ganzen Function von s sein. Es hat daher der grösste gemeinsame Theiler der zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung die Eigenschaft, durch $\mathfrak{F}(s)$ dividirt, und mit der

Function $(1 - s^\mu)$, die nur ungleiche Factoren enthält, multiplicirt, gleich einer ganzen Function von s zu sein, womit der zweite Theil der Behauptung bewiesen ist.

Wenn umgekehrt eine Substitution (1) so beschaffen ist, dass die zu derselben gehörende Determinante $\mathfrak{F}(s)$ die so eben erwähnten Eigenschaften besitzt, so lassen sich mit n unbeschränkt veränderlichen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n Ausdrücke bilden, wie sie sich auf der rechten Seite von (22) befinden, und dieselben sind nach den getroffenen Voraussetzungen ganze Functionen der unbestimmten Grösse s vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Dieselben mögen nach den Potenzen von s entwickelt, und wie in (16) bezeichnet werden. Dann folgt aus (22) das System (19), und wenn hier die Ausdrücke (16) der η_h eingesetzt werden, so erkennt man, dass wegen der Unbestimmtheit der Grösse s das System (1) oder (14), hierauf (15) gelten muss, und alle darauf folgenden beschriebenen Systeme gelten müssen, und dass als letztes das System (18) besteht. Diese Erscheinungen drücken aber aus, dass (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution hervorbringt. Hiermit ist der Nachweis vollendet, dass die aufgestellten Bedingungen nothwendig und hinreichend sind.

Bonn d. 4. April 1887.

DIE MINIMALFLÄCHEN
MIT EINEM
SYSTEM SPHÄRISCHER KRÜMMUNGSLINIEN

VON

HERMANN DOBRINER
in FRANKFURT a. M.

In engem Anschluss an die in meiner letzten Abhandlung[1] benutzten Methoden lässt sich auch die Frage nach den Minimalflächen erledigen, die ein System sphärischer Krümmungslinien besitzen. Diese repräsentiren in gewissem Sinne nur einen Grenzfall der entsprechenden Flächen constanter Krümmung, und man hätte an den Entwickelungen der citirten Abhandlung verhältnissmässig nur geringe Veränderungen vorzunehmen, um auch für die neuen Flächen die constituirenden Gleichungen zu finden. Indessen gelangt man zu denselben schneller und erhält sie auch sofort in ihrer einfachsten Gestalt, wenn man sich, statt auf die Gleichungen (5) zurückzugehn, der WEIERSTRASS'schen Formeln bedient. Die Anwendung derselben ist in diesem Falle ermöglicht, wenn man die Krümmungsradien in ihrer Abhängigkeit von den Parametern der Krümmungslinien kennt. Ich werde daher der Kürze wegen den Gang, der zu den Ausdrücken für die Krümmungsradien führt, nur andeuten, dann mit Hilfe der WEIERSTRASS'schen Formeln die Gleichungen der Fläche aufstellen und erst am Schluss die Gleichung der Kugel geben, auf welcher die Krümmungslinie $v = Const.$ liegt.

---

[1] Dieses Journal Bd. 9, p. 73—104.

Die Bedingung $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$ hat die Relationen

$$P = Q = \frac{1}{f} = -\frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

zur Folge, welche man an Stelle des Gleichungssystems (9) der weitern Untersuchung zu Grunde zu legen hat. Man findet dann zunächst die Gleichungen (14) wiederum in ihrer alten Gestalt, für $R\cos\sigma$ eine im Vergleich mit (15) complicirte Formel, und schliesslich für q_1 und q_2 Differentialgleichungen, die ihrer Form nach nicht mit (20) sondern mit (25) zusammenfallen; dies kennzeichnet das vorliegende Problem zu einem Grenzfall des frühern. Ersetzt man in (25)

$$p_1 \text{ durch } iq_1, \quad p_2 \text{ durch } q_2 \text{ und } u \text{ durch } iv,$$

so erhält man die Gleichungen für q_1 und q_2. Ihre expliciten Ausdrücke in v gehn durch dieselben Vertauschungen aus (33) hervor, mithin ist auch das System der l, m, n wesentlich identisch mit dem der λ, μ, ν. Bezeichnen λ', μ', ν' die Ausdrücke, in welche λ, μ, ν übergehn, wenn man in (49) u durch iv ersetzt, so ist

$$l_h = \mu'_h, \quad m_h = \nu'_h, \quad n_h = \lambda'_h. \qquad (h=1,2,3)$$

Hinsichtlich der Quantitäten p_1 und p_2, sowie überhaupt hinsichtlich aller von dem Parameter u abhängigen Grössen behalten die frühern Resultate unverändert Geltung.

Nun war (p. 102)

$$P = -\frac{\Sigma_h n_h \pi_h}{\Sigma_h l_h \lambda_h}$$

und darin (p. 103)

$$\pi_1 = -\sqrt{s}\,\frac{\vartheta_1\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_{11}^2(a)}\cdot\frac{\vartheta_1(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1)}, \text{ etc.}$$

wenn für den Factor $\frac{du_1}{du}$ sein Werth aus (30) gesetzt wird. Mithin ist

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{P} = -\frac{\Sigma_h \mu'_h \lambda_h}{\Sigma_h \lambda'_h \pi_h},$$

$$\sqrt{\rho} = \frac{i\vartheta_{11}^2(a)}{\sqrt{s}\,\vartheta_{11}(2a)}\cdot\frac{e^{r_2}\Sigma_h\vartheta_h\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1+a) + e^{-r_2}\Sigma_h\vartheta_h\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1-a)}{\Sigma_h\vartheta_h^2\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1)}.$$

Die drei Summen Σ_h lassen sich mit Hilfe der Thetaformel:[1]

$$\Sigma_h \vartheta_h \vartheta_h(x)\vartheta_h(y)\vartheta_h(z) = 2\vartheta_{11}(s)\vartheta_{11}(s-x)\vartheta_{11}(s-y)\vartheta_{11}(s-z)$$

$$2s = x + y + z \qquad {\scriptstyle (h=1,2,3)}$$

durch je ein Thetaprodukt wiedergeben, so dass man für $\sqrt{\rho}$ den einfachen Ausdruck:

$$\text{(a)} \qquad \sqrt{\rho} = \frac{i\vartheta_{11}^2(a)}{\sqrt{s}\,\vartheta_{11}(2a)} \cdot \frac{e^{v_2}\vartheta_{11}(\sigma+a)\vartheta_{11}(\sigma_1-a) + e^{-v_2}\vartheta_{11}(\sigma-a)\vartheta_{11}(\sigma_1+a)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)}$$

erhält, wenn man abkürzend

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \sigma &= \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{u+iv}{2}, \\ \sigma_1 &= \frac{u_1-v_1}{2} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{u-iv}{2} \end{aligned}$$

setzt.

Benutzt man ferner die Bezeichnungen

$$\text{(c)} \qquad \left| \begin{aligned} \tau &= \quad u_2 + v_2 = - \frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}(u_1 + v_1) + Const., \\ \tau_1 &= - u_2 + v_2 = + \frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}(u_1 - v_1) + Const. \end{aligned} \right.$$

und setzt

$$\text{(d)} \qquad \left| \begin{aligned} \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+a)}{\vartheta_{11}(\sigma-a)} &= t, \\ \frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-a)}{\vartheta_{11}(\sigma_1+a)} &= t_1, \end{aligned} \right.$$

so wird

$$\frac{dt}{d\sigma} = - \frac{e^{\tau}\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)}{\vartheta_{11}^2(a)\vartheta_{11}^2(\sigma-a)},$$

$$\frac{dt_1}{d\sigma_1} = + \frac{e^{\tau_1}\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma_1)}{\vartheta_{11}^2(a)\vartheta_{11}^2(\sigma_1+a)};$$

---

[1] Man erhält dieselbe durch Subtraction aus zwei von JACOBI angegebenen Formeln (Werke, Bd. I, p. 507 (3) und (4)); sie ist ein specieller Fall der allgemeinen Formel, die Herr PRYM die RIEMANN'sche Thetaformel genannt hat.

und

$$\rho = \frac{\vartheta_{11}'^2}{s} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt_1} (1 + tt_1)^2.$$

Die Grössen t, t_1 sowie σ, σ_1 und τ, τ_1 sind für reelle Werthe der Variabeln u und v conjugirt complex, wenn man die Constante a als rein imaginär voraussetzt.

Von einem Ausdrucke für den Krümmungsradius, der sich von dem obigen nur durch einen constanten Faktor unterscheidet, ausgehend, leitet ENNEPER[1] die WEIERSTRASS'schen Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche ab. Hier erscheinen sie in der Form:

$$x = R\int \frac{\vartheta_{11}'^2}{s}(1 - t^2)\frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

$$y = R\int \frac{i\vartheta_{11}'^2}{s}(1 + t^2)\frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

$$z = R\int \frac{2\vartheta_{11}'^2}{s} t \frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

wenn man durch das vorgesetzte R den reellen Teil des nachfolgenden Integrals bezeichnet. Es ist also:

$$x = R\int \frac{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}^2(a)}{s\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)}[e^{\tau}\vartheta_{11}^2(\sigma + a) - e^{-\tau}\vartheta_{11}^2(\sigma - a)]d\sigma,$$

$$y = R\int \frac{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}^2(a)}{is\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)}[e^{\tau}\vartheta_{11}^2(\sigma + a) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma - a)]d\sigma,$$

$$z = R\int - \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}^2(a)}{s\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)}\vartheta_{11}(\sigma + a)\vartheta_{11}(\sigma - a)d\sigma,$$

und nach der Integration:

$$x = - R\frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma + 2a) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma)},$$

$$y = - R\frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma + 2a) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma)},$$

$$z = - R\frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\left[\frac{d\log\vartheta_{11}(\sigma)}{d\sigma} - \sigma\frac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2}\right]$$

[1] Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 9, p. 103—107.

oder, wenn man noch die reelle Constante

$$-\frac{s\vartheta_{11}^2(2a)}{2\vartheta_{11}^4(a)} \quad \text{mit} \quad C$$

bezeichnet:

$$\text{(e)} \quad \left\{ \begin{aligned} Cx &= \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+2a)+e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma-2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma)} + \frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+e^{-\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma_1)}, \\ Cy &= \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+2a)-e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma-2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma)} - \frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)-e^{-\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma_1)}, \\ Cz &= \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}'}\left[\frac{\vartheta_{11}'(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}'(\sigma_1)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)} - v_1\frac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Ich gehe dazu über die Gleichung der Kugel aufzustellen, auf der die Krümmungslinie $v = Const.$ liegt.

Man setze

$$Cz + v_1\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}'}\cdot\frac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2} = Cz_1$$

und

$$\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}'}[\vartheta_{11}'(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}'(\sigma_1)] = \Delta,$$

so dass

$$\Delta = C\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)z_1$$

wird. Dann ist

$$\begin{aligned} &C^2\vartheta_{11}^2(\sigma)\vartheta_{11}^2(\sigma_1)(x^2+y^2+z_1^2) \\ &= \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\left[e^{2\tau_2}\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+e^{-2\tau_2}\vartheta_{11}(\sigma-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)\right] \\ &\quad + \Delta^2 + \vartheta_{11}^2(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma-2a) + \vartheta_{11}^2(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a). \end{aligned}$$

Nun stellt die Determinante Δ eine gerade θ-Function zweiter Ordnung mit der Characteristik (o) in Bezug auf das Argument $\frac{u_1}{2}$ dar; sie lässt sich daher durch zwei besondere, von einander unabhängige θ-Functionen gleicher Art linear ausdrücken. Wir wählen die beiden Darstellungen:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}'}[\vartheta_{11}'(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}'(\sigma_1)] \\ &= A\,\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a) + B\,\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1) \\ &= A_1\vartheta_{11}(\sigma-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a) + B_1\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1), \end{aligned}$$

und bestimmen die Coefficienten A und A_1, indem wir $\sigma_1 = 0$, $\sigma = v_1$ setzen, und die Coefficienten B, B_1, indem wir $\sigma_1 = \pm 2a$, $\sigma = \pm 2a + v_1$, annehmen.

Wir finden

$$\Delta = C\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)z_1$$

$$= + \frac{\vartheta_{11}(v_1)}{\vartheta_{11}(v_1 + 2a)}\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a)$$

$$+ \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\frac{\vartheta'_{11}(v_1 + 2a)\vartheta_{11}(2a) - \vartheta_{11}(v_1 + 2a)\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1 + 2a)}$$

$$= - \frac{\vartheta_{11}(v_1)}{\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)$$

$$+ \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\frac{\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)\vartheta_{11}(2a) + \vartheta_{11}(v_1 - 2a)\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)},$$

und daraus:

$$(\mathrm{f})\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)} \\[2ex] \qquad = Cz_1\,\dfrac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\[2ex] \quad - \dfrac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\dfrac{e^{2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\[2ex] \quad + \dfrac{\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\dfrac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)}. \end{array}\right.$$

Δ^2 ist eine gerade θ-Function vierter Ordnung, die wir linear durch drei von einander unabhängige Thetaproducte darstellen können. Setzen wir die Gleichung in der Form

$$\Delta^2 = A_2\left[\vartheta^2_{11}(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma - 2a) + \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a)\right]$$

$$+ B_2\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\Delta + C_2\vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta^2_{11}(\sigma_1)$$

an und entwickeln, indem wir $\sigma_1 = \sigma - v$ setzen, beide Seiten nach Po-

tenzen von σ, so erhalten wir durch Vergleichung der Coefficienten von σ^0, σ^1, σ^2:

$$A_2 = -1,$$

$$B_2 = \frac{2\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1},$$

$$C_2 = \frac{\vartheta'^2_{11}(2a) - \vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{11}(2a)}{\vartheta'^2_{11}} + \frac{\vartheta_{11}(v_1 + 2a)\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta^2(v_1)}$$

$$+ \frac{\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}} \cdot \frac{\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(v_1) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1)\vartheta''_{11}(v_1) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(v_1)}{\vartheta^2(v_1)}$$

$$= \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(2a) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{11}(2a) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}} - \frac{\vartheta^2_{11}(2a)\vartheta''_{11}(v_1)}{\vartheta'^2_{11}\vartheta_{11}(v_1)}.$$

Mithin ist:

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2 + \vartheta^2_{11}(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma - 2a) + \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a) \\ &\quad = \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta^2_{11}(\sigma_1)\left[\frac{2\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} Cz_1 + C_2\right]. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung der Kugel erhält man nun, wenn man (f) und (g) berücksichtigt, in folgender Gestalt:

$$\text{(h)} \qquad C^2(x^2 + y^2) + (Cz + V)^2 = W,$$

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{aligned} V = {} & \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d^2 \log \vartheta_{11}(a)}{da^2} v_1 - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} \\ & - \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{2\vartheta_{11}(v_1)} \\ W = {} & \left[\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} + \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{2\vartheta_{11}(v_1)}\right]^2 \\ & - \frac{\vartheta^2_{11}(2a)\vartheta''_{11}(v_1)}{\vartheta'^2_{11}\vartheta_{11}(v_1)} - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{e^{2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ & + \frac{\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ & + \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(2a) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta''_1(2a) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}}. \end{aligned} \right.$$

Die Krümmungslinien $v_1 = Const.$ liegen also sämmtlich auf Kugeln, die ihre Mittelpunkte auf der z-Axe haben. Die Curven $v_1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ bilden insofern Ausnahmen, als ihre osculirenden Kugeln in Ebenen degeneriren, die der xy-Ebene parallel sind. Man kann übrigens leicht nachweisen, dass diese Curven alle einander ähnlich sind.

Die Krümmungslinien $u = 0, \pm 2\omega, \pm 4\omega, \ldots$ sind gleichfalls plan und zwar in Ebenen gelegen, welche durch die z-Axe gehn. Sie zerlegen die Minimalfläche in congruente Teile, von denen jeder mit dem benachbarten Teilstücke zur Deckung gelangt, wenn man die ganze Fläche um die z-Axe dreht und zwar um den Winkel

$$\varepsilon = 4ia + \omega \frac{2i\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)},$$

worin ω der Periodicitätsmodul der ϑ-Functionen ist.

SUR CERTAINES OPÉRATIONS
FONCTIONNELLES
REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES

PAR

S. PINCHERLE
À BOLOGNE.

Le présent travail a pour objet d'esquisser quelques points de la théorie des expressions propres à représenter des fonctions analytiques et données sous forme d'intégrales définies. Je me borne ici aux expressions de la forme

$$\int A(x, y)\varphi(y)dy,$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne quelconque du plan y. Je me place à un point de vue qui n'est pas sans précédents,[1] mais qui, à ce que je crois, n'a pas encore été abordé d'une manière générale. Je considère en effet l'expression ci-dessus comme un algorithme appliqué au *sujet* variable $\varphi(y)$ et dont les propriétés essentielles dépendent de la fonction $A(x, y)$. Ces propriétés sont de deux sortes, formelles et effectives, et bien que la démarcation entre elles ne soit pas toujours nettement tranchée, je m'en occuperai séparément dans les deux parties de ce mémoire.

---

[1] V. à ce sujet une courte notice historique placée en tête de mon mémoire *Sopra alcune operazioni funzionali.* Memorie dell' Accad. di Bologna, S. IV, T. VII, 1886.

I.

1. Soit $A(x, y)$ une fonction analytique de deux variables. D'après la définition de M. Weierstrass, cette fonction est régulière dans le domaine d'une couple de valeurs (x_0, y_0) quand elle est développable, sous les conditions

$$|x - x_0| < \delta, \qquad |y - y_0| < \delta'$$

en une série de puissances entières et positives de $x - x_0$, $y - y_0$. La fonction $A(x, y)$ pourra d'ailleurs avoir des singularités quelconques, et chaque point $\bar{y}$, pris dans le plan y, déterminera dans le plan x le système, *correspondant à* $\bar{y}$, des singularités de la fonction $A(x, \bar{y})$.

Soit l une ligne, définie analytiquement, et ayant une longueur finie et déterminée, tracée dans le plan y. Si l'on fait varier y le long de cette ligne, les singularités correspondante décrivent dans le plan x, certains lieux géométriques correspondants à l; (*coupures,* selon l'expression de M[rs] Hermite et Goursat). Dans les cas les plus communs, ces coupures sont des lignes, mais elles peuvent être aussi des points ou des aires. J'indiquerai par T_x un champ connexe, pris dans le plan x, et tel que les coupures correspondant à l n'aient aucun point commun avec T_x.

2. Cela posé:

A. »Si $\varphi(y)$ est une fonction à une seule valeur, finie et continue, arbitrairement donnée pour les points de la ligne l, l'expression

$$(1) \qquad \int_l A(x, y)\varphi(y)dy$$

où l'intégration est faite le long de la ligne l, représente, à l'intérieur du champ T_x, une fonction analytique et monogène[1] de x.»

Prenons en effet un point quelconque x_0 à l'intérieur de T_x. Du point x_0 comme centre, décrivons un cercle (cercle r) avec un rayon r au plus égal à la limite inférieure des distances de x_0 aux coupures correspondant à l. Pour tout point y de la ligne l, la fonction $A(x, y)$ est régulière pour les valeurs de x comprises dans un cercle de centre x_0 et

[1] Dans le sens adopté par M[rs] Weierstrass et Mittag-Leffler.

de rayon au moins égal à r; elle peut par conséquent se développer en une série de puissances de $x - x_0$, dont les coefficients sont des fonctions de y régulières en chaque point de l. Si donc l'on pose

$$(2) \qquad A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(x_0, y)(x - x_0)^n,$$

on aura

$$| A^{(n)}(x_0, y) | < \frac{M}{r'^n},$$

où M est une quantité positive au moins égale à la limite des modules de $A(x, y)$ pour x intérieur au cercle r et y pris le long de la ligne l, et r' est un nombre positif moindre que r. Pour les couples de valeurs de x, y prises comme on vient de le dire, la série (2) est donc convergente absolument et uniformément; on peut la multiplier par $\varphi(y)dy$ et intégrer le long de l, et il vient:

$$\int_l A(x, y)\varphi(y)dy = \sum (x - x_0)^n \int_l A^{(n)}(x_0, y)\varphi(y)dy.$$

L'expression (1) équivaut donc, à l'intérieur du cercle r, à une série convergente de puissances entières et positives de $x - x_0$, et représente par conséquent une fonction analytique, c. q. f. d.[1]

3. Il est clair que la fonction ainsi définie peut être continuée analytiquement de proche en proche pour tout l'intérieur du champ T_x, et qu'elle représente par conséquent, à l'intérieur de ce champ, une seule et même fonction $f(x)$ monogène. Toutefois, si l'on considère un champ T'_x satisfaisant aux mêmes hypothèses que T_x, mais tel que l'on ne puisse passer de T_x à T'_x sans traverser les coupures, la même expression (1) représentera en général dans les deux champs deux fonctions analytiques différentes.

---

[1] Ce théorème, sous des hypothèses différentes et pour y réel, se trouve démontré dans l'*Habilitationsschrift* du jeune et regretté géomètre L. Scheeffer; un théorème semblable est admis aussi par M. Goursat au début de son beau mémoire *Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies* (ce journal T. 2). J'ai cru devoir reprendre ce théorème, d'abord parce qu'il est fondamental pour ce qui va suivre, ensuite parce que la démonstration que j'en donne, faite au point de vue de M. Weierstrass, est toute différente de celle de Scheeffer, fondée sur le concept de fonction de variable complexe selon Cauchy et Riemann.

4. Une démonstration tout-à-fait semblable servirait à prouver les deux propositions suivantes:

B. »Dans le champ T_x, la dérivée de la fonction $f(x)$ s'obtient en dérivant sous le signe.»

C. »L'expression

$$\int_{l_1}\int_{l} A(x, y) B(y, t) \varphi(t) dy dt,$$

sous des hypothèses analogues et dans un champ T_x défini comme ci-dessus, représente une fonction analytique de x; et sous les mêmes hypothèses, on peut intervertir l'ordre des intégrations.»

5. On pourrait aisément rendre moins restrictives les hypothèses faites sur la fonction $\varphi(y)$, mais cela n'est pas nécessaire pour le but de ce travail. Au contraire, je supposerai dorénavant que $\varphi(y)$ soit une fonction analytique de la variable y, régulière pour tous les points de la ligne l.

6. Si l'on pose

$$f(x) = \int_{l} A(x, y) \varphi(y) dy,$$

où x est pris dans le champ T_x, on peut regarder $A(x, y)$ comme une fonction donnée, fixe, tandis que $\varphi(y)$ pourra varier, tout en restant comprise en certaines classes déterminées. Je regarderai l'expression (1) comme un algorithme ou une *opération fonctionnelle* exécutée sur la fonction $\varphi(y)$. La nature de cette opération dépend surtout de la fonction $A(x, y)$, que j'appellerai *fonction caractéristique* de l'algorithme.

La fonction caractéristique et la ligne d'intégration restant fixées, la relation entre $\varphi(y)$ et $f(x)$ peut s'écrire d'une façon abrégée:

$$f(x) = A(\varphi). \tag{3}$$

Lorsque la fonction $\varphi(y)$ varie, sans cesser d'appartenir à une certaine classe déterminée, la fonction $f(x)$ varie d'une façon correspondante, en restant comprise dans certaines classes déterminées par la relation (3). Cette relation peut donc servir à exprimer, non seulement une dépendance entre les deux fonctions f et φ, mais encore une correspondance entre deux classes de fonctions analytiques. Pour en donner un exemple,

il suffit de rappeler la transformation de LAPLACE, qui n'est autre chose qu'une correspondance de cette espèce, et dont M. POINCARÉ a tout récemment renouvelé l'usage d'une façon si efficace, dans l'étude des intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires.[1]

7. Remarquons une fois pour toutes que pour chaque ligne d'intégration l, il existe en général des fonctions analytiques telles que

$$\int_l f(y)\,dy = 0. \tag{4}$$

J'indique ces fonctions par $\omega_i(y)$.

La fonction

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\omega_i(y)$$

où les fonctions $a_i(x)$ sont arbitraires, satisfait pareillement à l'équation (4) quel que soit n et même pour $n = \infty$ si la série est intégrable terme à terme. (Il suffit pour cela qu'elle soit convergente uniformément ou qu'elle satisfasse à l'autre condition moins restrictive récemment donnée par M. ARZELÀ[2]).

8. L'un des problèmes les plus importants qui se présentent dans l'étude de la correspondance définie par la relation (3), est le suivant:

»Etant données la fonction caractéristique $A(x, y)$, la ligne d'intégration l, et une fonction $f(x)$ dans le champ T_x, déterminer la fonction $\varphi(y)$.»

Ce problème, qu'on a appelé »inversion des intégrales définies»,[3] et qui se présente fréquemment en Physique mathématique et notamment dans la théorie du potentiel, a été traité dans de nombreux cas particuliers, mais il n'est pas à ma connaissance qu'il en ait été fait une étude générale. Pour l'historique de la question, je renvoie à mon mémoire déjà cité, publié par l'Académie de Bologne.

---

[1] American Journal of Mathematics, T. 7. — Acta Mathematica, T. 8.

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1885.

[3] LAURENT, *Sur le calcul inverse des intégrales définies.* Journal de Mathém., S. III, T. IV. Dans ce mémoire le problème est énoncé en général, mais la solution n'en est donnée que pour deux cas particuliers.

Remarquons, en passant, que dans la plupart des cas, le problème du développement d'une fonction en série de fonctions données, se ramène à une question d'inversion d'intégrales définies.

Le problème d'inversion équivaut à la recherche de l'opération inverse de $A(\varphi)$. D'après le § 7, cette opération sera en général multiforme; or, je me propose d'étudier le cas où l'une des déterminations de cette opération inverse peut se représenter par un algorithme de la même espèce que $A(\varphi)$. En d'autres termes, je m'occuperai du cas où il existe une fonction $\mathbf{A}(y, t)$ et une ligne d'intégration λ telles que l'on ait (au moins pour certaines classes de fonctions φ et f):

$$\varphi(y) = \int_\lambda \mathbf{A}(y, t) f(t) dt$$

comme conséquence de

$$f = A(\varphi).$$

En ce cas, le problème d'inversion revient à la recherche de la fonction $\mathbf{A}(y, t)$, que j'appellerai fonction *réciproque* de $A(x, y)$.

Je ferai précéder cette recherche des considérations suivantes.

9. Soient deux opérations A, B définies par les fonctions caractéristiques $A(x, y)$, $B(y, t)$. Si l'on exécute sur une fonction φ, d'abord l'opération B, puis l'opération A sur le résultat obtenu, cette double opération pourra s'appeler le *produit* des deux opérations A, B, et on pourra l'indiquer par

$$AB(\varphi).$$

On doit toujours supposer vérifiées les conditions sous lesquelles ces opérations ont une signification déterminée, p. ex. les conditions suffisantes énoncées au § 2. Je n'insisterai donc pas ici sur ces conditions, d'autant plus qu'il ne s'agit pour le moment que du côté *formel* de la question. On a, en indiquant par l' la ligne d'intégration dans le plan t:

$$AB(\varphi) = \int_l A(x, y) \int_{l'} B(y, t) \varphi(t) dt dy$$

que l'on peut écrire (§ 4, C)

$$\int_{l'}\int_l A(x, y) B(y, t) dy \varphi(t) dt;$$

d'où il suit que l'opération $AB(\varphi)$ est de la même nature que $A(\varphi)$, et a pour fonction caractéristique

$$\int_l A(x, y) B(y, t) dy.$$

On définirait de même le *produit* de trois ou d'un nombre quelconque d'opérations de la même nature que A.

10. Le produit des opérations A, tel qu'on vient de le définir, satisfait aux lois distributives et associatives. Cela se vérifie sans difficulté. Mais le produit de deux opérations A ne satisfait pas, en général, à la loi commutative.

11. Si $\mathbf{A}(y, t)$ est la fonction réciproque de $A(x, y)$ on aura

$$A\mathbf{A}(\varphi) = \varphi,$$

c'est-à-dire la fonction

$$U(x, t) = \int A(x, y) \mathbf{A}(y, t) dy$$

est telle, qu'au moins pour certaines classes de fonctions φ et certaines portions du plan x convenablement choisies, on a

$$U(\varphi) = \varphi. \tag{5}$$

Telle est par exemple, pour les fonctions φ régulières dans une aire limitée par une courbe fermée, la fonction $\frac{1}{t - x}$.

12. Avant d'aller plus loin, il nous faut examiner une espèce particulière d'opérations (3): ce sont celles *qui conservent la dérivation;* c'est-à-dire (en indiquant les dérivées par des accents) telles que l'on ait:

$$A(\varphi) = f, \qquad A(\varphi') = f'. \tag{6}$$

On peut faire sur ces opérations les remarques suivantes:

a. Les fonctions U telles que (5) conservent la dérivation.

b. Si une opération A conserve la dérivation, sa réciproque $\mathbf{A}$ la conserve aussi.

c. Si une opération A conserve la dérivation, les fonctions $A(y^n)$ ne sont autre chose que les polynômes de M. Appell.[1]

[1] *Sur une classe de polynômes.* (Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1880.)

En effet, d'après l'hypothèse (6), l'opération A appliquée à une constante donnera une constante; appliquée à y, elle donnera donc une fonction linéaire en x; appliquée à y^n, elle donnera un polynôme de degré n en x. De plus, par la même hypothèse (6), si l'on pose

$$A(y^n) = a_n(x)$$

on a

$$\frac{da_n(x)}{dx} = nA(y^{n-1}) = na_{n-1}(x),$$

ce qui est précisément la définition des polynômes de M. Appell.

d. Réciproquement, si une opération A est telle que les fonctions $A(y^n)$ constituent un système de polynômes de M. Appell, cette opération conserve la dérivation, au moins pour les séries de puissances. Cela se vérifie aisément.

13. Le produit de deux opérations qui conservent la dérivation jouit de la même propriété. En effet, si les opérations A et B conservent la dérivation, on a d'après ce qui précède:

$$(7) \qquad A(y^n) = \alpha_0 x^n + n\alpha_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_n,$$

$$(7') \qquad B(y^n) = \beta_0 x^n + n\beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 x^{n-2} + \ldots + \beta_n;$$

or, formons

$$AB(t^n) = \int_l\int_l A(x, y) B(y, t) t^n dt\, dy,$$

on aura

$$AB(t^n) = \int_l A(x, y)\left[\beta_0 y^n + n\beta_1 y^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 y^{n-2} + \ldots + \beta_n\right] dy,$$

d'où

$$AB(t^n) = \beta_0 a_n(x) + n\beta_1 a_{n-1}(x) + \ldots + \beta_n a_0.$$

Mais ceci est encore un des systèmes de polynômes en question, et précisément celui que M. Appell indique par $(AB)_n$;[1] d'où suit que l'opération AB, au moins formellement et pour les séries de puissances, conserve encore la dérivation.

---

[1] Loc. cit., § 3.

14. Il résulte de ce qui précède que la recherche de la fonction réciproque d'une fonction $A(x, y)$ qui conserve la dérivation, pour une ligne d'intégration donnée, dépend de la recherche des polynômes que M. Appell nomme *inverses* des polynômes $a_n(x)$: or comme on peut toujours construire ces polynômes inverses, il s'ensuit que l'on peut, au moins formellement, intervertir l'opération A.

15. Cherchons la forme générale des fonctions $A(x, y)$ qui conservent la dérivation. A cet effet, soit

$$A(x, y) = \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y};$$

on aura, par hypothèse,

$$(8)\qquad \left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_l \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y}\varphi(y)dy = f(x), \\[2ex] \displaystyle\int_l \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y}\varphi'(y)dy = f'(x). \end{array}\right.$$

Intégrons par parties la première de ces équations, et nous aurons:

$$f(x) = \left[\overline{A}(x, y)\varphi(y)\right]_l - \int_l \overline{A}(x, y)\varphi'(y)dy.$$

Or supposons que l'on ait:

$$(9)\qquad \left[\overline{A}(x, y)\varphi(y)\right]_l = 0,$$

il vient

$$f(x) = -\int_l \overline{A}(x, y)\varphi'(y)dy;$$

d'où, en dérivant sous le signe et en tenant compte de la seconde des équations (8), on a:

$$(10)\qquad \int_l \left(\frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{A}(x, y)}{\partial y}\right)\varphi'(y)dy = 0.$$

Cette équation est satisfaite quelle que soit la fonction φ si l'on prend

$$\frac{\partial A(x,\ y)}{\partial x} + \frac{\partial A(x,\ y)}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$A(x,\ y) = \Phi(y - x),$$

où Φ est une fonction arbitraire.

16. Revenons maintenant à la question générale que nous avons posée au § 8, c'est à dire à la détermination de la fonction réciproque d'une fonction quelconque $A(x,\ y)$. Je remarque que ce problème, et par suite celui de l'inversion d'une intégrale définie de la forme (1), sera formellement résolu si l'on pourra déterminer une fonction $B(y,\ t)$ telle que le produit AB conserve la dérivation. En effet, il suffira alors de déterminer la fonction $C(x,\ y)$, réciproque de la fonction caractéristique de l'opération AB, ce qui est possible d'après le § 14; on aura donc

$$ABC(\varphi) = \varphi,$$

et puisque les opérations (3) obéissent à la loi associative, on aura,

$$BC = \mathbf{A}.$$

Notre problème est donc ramené à la recherche de la fonction $B(y,\ t)$. S'il est possible, il admettra en général une infinité de solutions.

17. Posons à cet effet:

$$E(x,\ y) = \int_l A(x,\ y) B(y,\ t)\, dy;$$

il suffira que la fonction $E(x,\ t)$ satisfasse à l'équation aux limites (9) et à l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} = \int_l \left(\frac{\partial A}{\partial x} B + A \frac{\partial B}{\partial t}\right) dy = 0. \tag{11}$$

Or, si nous indiquons, comme au § 7, les fonctions dont l'intégrale est nulle le long de la ligne d'intégration par $\omega_i(y)$, l'équation précédente équivaut à

$$\frac{\partial A(x,\ y)}{\partial x} B(y,\ t) + \frac{\partial B(y,\ t)}{\partial t} A(x,\ y) = \Sigma \lambda_i(x,\ t)\, \omega_i(y)$$

où les λ_i sont des fonctions arbitraires. On résout facilement cette équation linéaire du premier ordre en B; mais l'intégrale dépend de x, y et t, tandis que B ne doit contenir que y et t. On devra donc déterminer les fonctions arbitraires λ_i et la fonction arbitraire amenée par l'intégration, en sorte que l'on ait $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ et que l'équation aux limites soit satisfaite. Si cela est possible, le problème est résolu.

Comme on l'a déjà remarqué *à priori,* lorsque le problème est possible, B contiendra encore des fonctions arbitraires même après qu'on aura satisfait aux conditions ci-dessus. En effet, lorsqu'on a trouvé une fonction B, on peut en déduire une infinité d'autres. Une détermination spéciale des fonctions arbitraires nous donnera (§ 14) la fonction réciproque de $A(x, y)$.

18. Le procédé que je viens d'indiquer pour résoudre le problème de l'inversion des intégrales définies, est assez long dans la pratique; toutefois il peut être simplifié selon les formes particulières des fonctions caractéristiques et des lignes d'intégration.

Voici quelques remarques qui peuvent servir à l'abréger dans certains cas particuliers:

a. Si une opération A peut s'écrire sous forme de *produit* de deux autres opérations:

$$A = MN,$$

et que l'opération M conserve la dérivation, il suffira que NB conserve la dérivation pour qu'il en soit de même de AB. Cette remarque pourra, dans certains cas, simplifier la recherche de la fonction B.

b. Si la fonction $A(x, y)$ est de la forme $M(x, y)\varphi(y)$ et admet pour fonction réciproque $B(y, t)$, la fonction $M(x, y)$ aura pour fonction réciproque $\frac{B(y, t)}{\varphi(y)}$.

c. Si la fonction $A(x, y)$ admet pour fonction réciproque $B(y, t)$, la fonction $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y}$ admet pour fonction réciproque $\int^y B(y, t)dy$, sous la condition que l'équation aux limites soit satisfaite; on trouve un résultat analogue pour les dérivées partielles d'ordre supérieur par rapport à y de la fonction $A(x, y)$.

19. Pour le moment, je me bornerai à examiner un seul cas particulier du problème précédent: celui où les fonctions A et B vérifient l'équation

$$(12) \qquad \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} B(y, t) + \frac{\partial B(y, t)}{\partial t} A(x, y) = 0.$$

Si de telles fonctions existent, l'équation (11) sera satisfaite, quelle que soit la ligne d'intégration. Or l'équation (12) peut s'écrire:

$$\frac{\frac{\partial A(x, y)}{\partial x}}{A(x, y)} = -\frac{\frac{\partial B(y, t)}{\partial t}}{B(y, t)};$$

mais ici le second membre ne contient pas x; il faudra donc qu'il en soit de même du premier, qui devra par conséquent être une fonction de y seulement. On aura donc:

$$\frac{\partial}{\partial x} \log A(x, y) = f(y),$$

d'où, en indiquant par $\chi(y)$ une fonction arbitraire:

$$(13) \qquad A(x, y) = \chi(y) e^{xf(y)}.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial t} \log B(y, t) = -f(y)$$

et par conséquent

$$(14) \qquad B(y, t) = \tau(y) e^{-tf(y)},$$

où $\tau(y)$ est encore une fonction arbitraire. Comme on l'a vu plus haut (§ 17), pour une détermination spéciale de cette fonction $\tau(y)$, on obtiendra la fonction $\mathbf{A}(y, t)$ réciproque de $A(x, y)$. Cette détermination dépendra de $f(y)$, de $\chi(y)$ et des lignes d'intégration.

20. La transformation de Laplace, celle d'Abel, la transformation analogue

$$\int e^{\frac{x}{y}} \varphi(y) \frac{dy}{y}$$

où l'intégration est étendue à un contour fermé et qui est si utile pour

la génération de fonctions trascendantes entières,[1] ne sont que des cas particuliers de la transformation dont la fonction caractéristique a la forme (13). Ces opérations fonctionnelles s'appliquent, comme on sait,[2] soit à la transformation de certaines équations différentielles en d'autres, soit à la transformation de certaines classes d'équations différentielles linéaires en équations linéaires aux différences finies.

On trouve dans les oeuvres de RIEMANN (p. 140) la solution du problème d'inversion d'une intégrale définie, dont la fonction caractéristique présente un cas particulier de la forme (13). RIEMANN, sous la condition que l'équation aux limites soit vérifiée, obtient en effet, l'expression réciproque de

$$f(x) = \int y^{-x}\varphi(y)\frac{dy}{y},$$

sous la forme

$$\varphi(y) = \int y^t f(t)dt,$$

ce qui peut parfaitement se déduire des formules précédentes.

II.

21. J'ai montré aux §§ 1 et 2 que l'expression

$$A(\varphi) = \int_l A(x, y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

représente, dans tout champ connexe qui n'a aucun point commun avec les coupures correspondant à la ligne l, une fonction ou branche de fonction analytique monogène. J'ai considéré l'expression $A(\varphi)$ comme

---

[1] V. mon mémoire déjà cité. (Mem. dell' Accad. di Bologna, S. IV, T. VII, §§ 24 et suiv.)

[2] Pour les applications récentes de ces transformations, v. surtout les mémoires, déjà cités, de M. POINCARÉ; et encore HJ. MELLIN, *Zur Theorie der Gammafunction*, § 12 (Acta Mathematica, T. 8), et *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen* (Ibid. T. 9), ainsi que ma note insérée aux Rendiconti del R. Istituto Lombardo, juin 1886.

une opération appliquée au *sujet* φ, et j'ai indiqué une méthode pour la résolution, au moins formelle, de l'équation

$$A(\varphi) = \psi,$$

où φ est une fonction inconnue: ce qui revient à la recherche de l'opération $\mathbf{A}$ réciproque de A, telle que

$$\varphi = \mathbf{A}(\psi).$$

Je me propose maintenant de donner les propriétés, non plus seulement formelles, mais effectives de l'opération A; je serai toutefois forcé de me borner, pour le moment, au cas où la ligne d'intégration est fermée, et plus particulièrement au cas où elle se réduit à une circonférence quelconque du plan y. Pour abréger, j'indiquerai par (α, ρ) une circonférence de centre $y = \alpha$ et de rayon ρ.

La fonction caractéristique $A(x, y)$ sera aussi soumise à quelques restrictions. Je supposerai que les points singuliers de cette fonction soient les couples de valeurs qui vérifient l'équation algébrique de degré m

$$f(x, y) = 0; \tag{2}$$

je supposerai encore que $A(x, y)$ soit une fonction uniforme, et soit nulle du 1er ordre pour $y = \infty$, sauf pour un nombre fini de valeurs de x; mais ces deux dernières restrictions seraient faciles à lever par des méthodes connues.

22. Examinons d'abord de plus près les coupures correspondant à la circonférence (α, ρ).[1] Pour chaque point $\bar{x}$ du plan x, l'équation (2) donne m valeurs pour $y - \alpha$; nous pourrons figurer les modules de ces valeurs par des ordonnées élevées au point $\bar{x}$ perpendiculairement au plan x. Le lieu des extrémités de ces ordonnées sera une surface S_α, formée en général de plusieurs nappes; ces nappes peuvent, en certains cas, se recouvrir en tout ou en partie, ou se rencontrer suivant des lignes ou en des points singuliers de la surface.

Si l'on coupe la surface S_α par un plan w parallèle au plan des x et à la distance ρ, la section se projette en vraie grandeur sur le plan

---

[1] Cfr. mon mémoire *Studi sopra alcune operazioni funzionali*, § 33. Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VII, 1886.

x en une courbe C_ρ, lieu des points pour lesquels au moins une des solutions de l'équation (2) vérifie la condition

$$|y - \alpha| = \rho.$$

Or, les ordonnées élevées au plan x jusqu'à la rencontre du plan sécant w pourront, pour certaines régions du plan x, ne rencontrer aucun point de la surface S_α; pour d'autres régions, elles rencontreront une, deux, ..., m nappes de la surface; et ces diverses régions du plan x, connexes ou non, seront séparées l'une de l'autre par des branches de la courbe C_ρ. J'indiquerai par

$$E_i(\alpha, \rho), \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m)$$

la région du plan x telle que l'ordonnée élevée en l'un de ses points jusqu'à la rencontre du plan w rencontre i nappes (distinctes ou coïncidentes) de la surface S_α; en sorte que pour tout point de $E_i(\alpha, \rho)$, i racines de l'équation (2) vérifient l'inégalité

$$|y - \alpha| < \rho.$$

23. Je vais maintenant étudier plus en détail l'opération $A(\varphi)$, en commençant par le cas où la variable x est prise à l'intérieur du champ que je viens d'indiquer par $E_m(\alpha, \rho)$. Pour de telles valeurs de x, toutes les singularités de $A(x, y)$ sont, par définition, à l'intérieur du cercle (α, ρ); on peut donc écrire, pour x intérieur à $E_m(\alpha, \rho)$ et pour $|y| \geqq \rho$:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{(y - \alpha)^{n+1}}. \tag{3}$$

Soit maintenant $\varphi(y)$ une fonction analytique uniforme quelconque, mais qui n'a aucune singularité le long de la circonférence (α, ρ): on aura dans la couronne circulaire comprise entre les circonférences $(\alpha, \rho - \varepsilon)$ et $(\alpha, \rho + \varepsilon)$, où ε est une quantité positive suffisamment petite:

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y - \alpha)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n'}{(y - \alpha)^{n+1}}.$$

Pour abréger, j'indiquerai les deux séries du second membre respectivement par [1]

$$i_\rho \varphi \quad \text{et} \quad j_\rho \varphi.$$

[1] Cfr. mon mémoire cité, § 2 et passim.

La première est convergente dans tout le cercle $(\alpha, \rho+\varepsilon)$; la seconde l'est en dehors du cercle $(\alpha, \rho-\varepsilon)$.

Or, on vérifie immédiatement que

$$A(j_\rho\varphi)=0, \qquad A(i_\rho\varphi)=A(\varphi) \tag{4}$$

et que

$$A(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n(x). \tag{5}$$

On voit donc que pour les valeurs de x prises à l'intérieur de $E_m(\alpha, \rho)$, il suffit d'appliquer l'opération A aux séries de puissances convergentes dans un cercle $(\alpha, \rho+\varepsilon)$. L'opération A fait correspondre à ces séries, des séries de fonctions $A_n(x)$ ayant les mêmes coefficients, convergentes uniformément au moins dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$, et qui représentent dans ce champ la même fonction que l'intégrale (1).

24. Examinons les cas les plus remarquables auxquels peut donner lieu l'opération A appliquée à une fonction $\varphi(y)$ régulière dans le cercle (α, ρ), la circonférence comprise.

a. Supposons que la fonction $\varphi(y)$ ait un seul point singulier β, situé en dehors de (α, ρ). On a alors, en négligeant une constante additive:

$$\varphi(y)=\sum \frac{a_n}{(y-\beta)^{n+1}};$$

mais puisque $A(x, y)$ est régulière en dehors de (α, ρ), on a par le théorème de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} \frac{A(x, y)}{(y-\beta)^{n+1}}dy=-\frac{1}{\underline{|n}}\frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial\beta^n}.$$

On a donc

$$A(\varphi)=-2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\underline{|n}}\frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial\beta^n}. \tag{6}$$

Ce développement est convergent dans tout le champ $E_m(\alpha, \rho)$ et y coïncide avec le développement (5); mais il converge aussi en dehors de ce champ. En effet, pour une valeur quelconque $\bar{x}$ de x on a:

$$A(\bar{x}, y)=\sum_0^{\infty}\frac{(y-\beta)^n}{\underline{|n}}\frac{\partial^n A(\bar{x}, \beta)}{\partial\beta^n};$$

la série du second membre converge dans un cercle de centre β et de rayon égal à la plus petite distance $\partial(\overline{x})$ du point β aux points singuliers de $A(\overline{x}, y)$. On aura donc, en indiquant (cfr. FROBENIUS, Journal de CRELLE, T. 73) par la notation $a_n \sim b_n$ que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même cercle de convergence,

$$\frac{1}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n} \sim \frac{1}{\partial(x)^n},$$

et $\partial(x)$ ne devient nul qu'aux m points x qui vérifient l'équation

$$f(x, \beta) = 0.$$

Par conséquent, si l'on excepte ces points en nombre fini, la série

$$\sum \frac{a_n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \beta)}{\partial \beta^n}$$

converge partout uniformément. Elle représente par conséquent une fonction uniforme ayant un nombre fini de points singuliers.

b. Supposons que $\varphi(y)$ ait un nombre fini de points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Cette fonction pourra s'écrire

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{(y-\beta)^{n+1}},$$

d'où l'on tire comme précédemment, par le théorème de CAUCHY:

$$A(\varphi) = -2\pi i \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \beta_\nu)}{\partial \beta_\nu^n}. \tag{7}$$

Le même raisonnement appliqué ci-dessus sert à démontrer que cette expression coïncide avec la série (5) dans le champ $E_m(\alpha, \beta)$ et représente d'ailleurs une fonction uniforme régulière dans tout le plan, sauf aux points en nombre fini qui vérifient l'une des équations

$$f(x, \beta_\nu) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Cette fonction est donc dans tout le plan, (sauf les dits points) la continuation analytique de la fonction représentée dans $E_m(\alpha, \beta)$ par la série (5) ou l'intégrale (1).

c. Supposons enfin que la fonction $\varphi(y)$ soit singulière en une infinité de points donnés

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

de telle façon que la différence

$$\varphi(y) - G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right),$$

où $G_\nu(z)$ est une fonction donnée, se comporte régulièrement au point β_ν. Le groupe (β_ν) pourrait avoir des groupes limites de n'importe quelle sorte; je me bornerai toutefois au cas le plus simple, où il n'y a qu'un point limite b.[1] Dans ce cas, on peut procéder comme il suit:

Développons $G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right)$ en série convergente en dehors du cercle $(b, |b-\beta_\nu|)$:

$$G_\nu\left(\frac{1}{y-\beta_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}};$$

et posons

$$F_\nu(y) = \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{h_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}};$$

la fonction représentée par cette série étant régulière dans tout le plan, sauf aux points β_ν et b. D'après les démonstrations connues des théorèmes de M. Mittag-Leffler, on sait qu'on peut déterminer les nombres m_ν de telle sorte que l'on ait

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(y) + \overline{G}\left(\frac{1}{y-\beta}\right);$$

ou encore, en distribuant les termes de la série additive $\overline{G}$ dans les fonctions $F_\nu(y)$, que l'on pourra indiquer par $\overline{F}_\nu(y)$ après ce changement, on aura

(8) $$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{F}_\nu(y),$$

---

[1] Les cas plus généraux peuvent se traiter sans difficulté d'après celui-ci, et en se servant des méthodes employées par M. Mittag-Leffler dans la démonstration des théorèmes de son grand mémoire: *Sur la représentation des fonctions uniformes.* (Acta Mathematica, T. 4.)

et en dehors du cercle $(b, |b - \beta_\nu|)$, $\overline{F}_\nu(y)$ aura un développement de la forme

$$\sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}}.$$

Or, si l'on fait abstraction des premiers termes de la série (8), les cercles $(b, |b - \beta_\nu|)$ seront assez petits pour être extérieurs au cercle (α, ρ); par conséquent, sur la circonférence de ce cercle la série (8) convergera uniformément, et l'on aura en ce cas pour $A(\varphi)$ l'expression:

$$(9) \qquad A(\varphi) = -2\pi i \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, b)}{\partial b^n}.$$

Je dis maintenant que cette expression, qui coïncide avec $A(\varphi)$ dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$, représente dans tout le plan x une même fonction analytique monogène, régulière partout, sauf aux points x racines des équations

$$f(x, b) = 0, \qquad f(x, \beta_\nu) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

Démonstration. Prenons un point $x = \xi$ quelconque, qui ne soit racine d'aucune des équations ci-dessus, et supposons que λ indique la plus petite distance de b aux points racines de $f(\xi, y) = 0$. Je pose

$$\delta_\nu = |b - \beta_\nu|, \qquad \lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0;$$

je pourrai donc toujours déterminer μ assez grand pour que l'on ait, pour $\nu \geqq \mu$:

$$\delta_\nu < \lambda.$$

Or, d'après le procédé de démonstration du théorème de M. MITTAG-LEFFLER, les nombres m_ν sont tellement choisis que l'on ait

$$\sum_{m_\nu}^{\infty} \left| \frac{k_{\nu,n}}{(y-b)^{n+1}} \right| < \varepsilon_\nu,$$

où ε_ν est une quantité positive donnée. Mais cette série converge en dehors

du cercle (b, δ_ν); on en déduit donc par un théorème connu sur les séries de puissances

$$|k_{\nu,n}| < \delta'^n_\nu \varepsilon_\nu,$$

où δ'_ν est une quantité supérieure à δ_ν d'aussi peu que l'on voudra.

D'un autre côté, la série

$$A(\xi, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-b)^n}{\lfloor n} \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n}$$

converge évidemment dans le cercle (b, λ); on aura donc par le même théorème sur les séries:

$$\frac{1}{\lfloor n}\left|\frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n}\right| < \frac{M}{\lambda'^n},$$

où M est un nombre positif et λ' une quantité positive moindre que λ d'aussi peu que l'on voudra.

Si donc je considère la série:

$$A(\overline{F}_\nu) = \sum_{m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{\lfloor n} \frac{\partial^n A(\xi, b)}{\partial b^n},$$

j'aurai:

$$|A(\overline{F}_\nu)| < M \sum_{m_\nu}^{\infty} \frac{\delta'^n_\nu \varepsilon_\nu}{\lambda'^n};$$

mais puisque l'on a $\delta_\nu < \lambda$, on peut supposer aussi $\delta'_\nu < \lambda'$ et par conséquent:

$$|A(\overline{F}_\nu)| < M\varepsilon_\nu \left(\frac{\delta'_\nu}{\lambda'}\right)^{m_\nu} \frac{1}{1 - \frac{\delta'_\nu}{\lambda'}},$$

et puisque les quantités δ'_ν décroissent quand ν croît, on aura en indiquant par M' une quantité positive:

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} |A(\overline{F}_\nu)| < M' \sum_{\mu}^{\infty} \varepsilon_\nu.$$

Il suit de là que la série

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \sum_{n=m_\nu}^{\infty} \frac{k_{\nu,n}}{\lfloor n} \frac{\partial^n A(x, b)}{\partial b^n}$$

est convergente absolument et uniformément pour toutes les valeurs de x telle que la quantité λ soit $> \delta_\nu$ pour $\nu \geqq \mu$. Elle représente donc pour ces valeurs une fonction analytique régulière. La somme complémentaire

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} A\left[\overline{F}_\nu(y)\right]$$

rentre dans le cas b précédent, et représente une fonction analytique régulière partout, sauf aux points tels que

$$f(x, \beta_\nu) = 0; \qquad (\nu=1, 2, \ldots, \mu-1)$$

le théorème se trouve donc démontré.

25. En même temps que le champ $E_m(\alpha, \rho)$, on peut considérer le champ $E_m(\alpha_1, \rho_1)$ et il pourra se faire que ces deux champs aient une partie commune. Par exemple, si le cercle (α_1, ρ_1) est intérieur au cercle (α, ρ), le champ $E_m(\alpha_1, \rho_1)$ sera nécessairement compris dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$.

Or, soient deux champs $E_m(\alpha, \rho)$, $E_m(\alpha_1, \rho_1)$ qui aient une partie commune; les deux cercles auront aussi une partie commune dans laquelle on pourra décrire un cercle intérieur (α_2, ρ_2); et le champ $E_m(\alpha_2, \rho_2)$ sera intérieur à $E_m(\alpha, \rho)$ et $E_m(\alpha_1, \rho_1)$. D'après le théorème de Cauchy, si $\varphi(y)$ est une fonction uniforme régulière dans les cercles (α, ρ) et (α_1, ρ_1), on aura pour un point x pris à l'intérieur de $E_m(\alpha_2, \rho_2)$:

$$A_\rho(\varphi) = A_{\rho_1}(\varphi) = A_{\rho_2}(\varphi).$$

Par conséquent, on aura aussi en indiquant par $A_n^{(1)}(x)$, $A_n^{(2)}(x)$ les fonctions analogues au système $A_n(x)$ dans les nouveaux champs considérés:

$$\Sigma c_n A_n(x) = \Sigma c_n^{(1)} A_n^{(1)}(x) = \Sigma c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x).$$

Ces formules nous donnent, pour les développements (5), un concept tout à fait analogue à celui de la *continuation analytique* pour les séries de puissances; ainsi la série $\Sigma c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x)$ peut être regardée comme la continuation analytique de la série $\Sigma c_n A_n(x)$, la série $\Sigma c_n^{(1)} A_n^{(1)}(x)$ comme la continuation de la série $\Sigma c_n^{(2)} A_n^{(2)}(x)$ et ainsi de suite. Notons encore

que les coefficients c_n, $c_n^{(1)}$, $c_n^{(2)}$, ... sont précisément ceux des continuations analytiques correspondantes de la série

$$\varphi(y) = \Sigma c_n (y - \alpha)^n. \tag{10}$$

26. On pourrait ajouter ici plusieurs remarques sur les développements (5); je me bornerai aux suivantes:

a. Etant donnée la série de puissances $\varphi(y)$ de la forme (10), on aura

$$A(\varphi) = c_0 A_0(x) + c_1 A_1(x) + c_2 A_2(x) + \dots,$$

$$A\left(\frac{\varphi}{y-\alpha}\right) = c_1 A_0(x) + c_2 A_1(x) + c_3 A_2(x) + \dots.$$

d'où

$$A\left\{\varphi(y)\left(h_0 + \frac{h_1}{y-\alpha} + \dots + \frac{h_p}{(y-\alpha)^p}\right)\right\} \tag{11}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 c_n + \lambda_1 c_{n+1} + \dots + \lambda_p c_{n+p}) A_n(x).$$

De cette formule et du § 24, b, on déduit sans difficulté le théorème suivant:[1]

»De même qu'une fonction rationnelle est représentée par une série récurrente de puissances, de même une fonction de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p} \left(k_{\nu,0} A(x, \alpha_\nu) + k_{\nu,1} \frac{\partial A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu} + \dots + k_{\nu, r_\nu} \frac{\partial^{r_\nu} A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^{r_\nu}}\right)$$

est représentée par une série récurrente de fonctions $A_n(x)$.»

La réciproque de ce théorème n'est vraie que dans le cas où l'on sait qu'avec les fonctions $A_n(x)$ on ne peut former des développements de zéro (*Nullentwickelungen*).

b. La formule (11) peut s'étendre au cas où le multiplicateur de $\varphi(y)$ devient une série de puissances. Dans ce cas, on aura

$$A\left\{\varphi(y) \sum \frac{h_\mu}{(y-\alpha)^\mu}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda_\mu c_{n+\mu} A_n(x).$$

---

[1] V. dans mon mémoire déjà cité, §§ 24—29, plusieurs applications de ce théorème, notamment la transformation des fonctions rationnelles en intégrales des équations différentielles ou aux différences linéaires et à coefficients constants.

Sous les conditions de convergence, qui sont satisfaites si $\varphi(y)$ et

$$\sum \frac{h_\mu}{(y-a)^\mu}$$

ont une circonférence commune de convergence, le second membre peut s'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(h_0 A_n + h_1 A_{n-1} + \ldots + h_n A_0).$$

En posant

$$(12) \qquad h_n(A) = h_0 A_n + h_1 A_{n-1} + \ldots + h_n A_0,$$

on trouve aisément que ces polynômes généraux $h_n(A)$ jouissent de propriétés distributives analogues à celles des polynômes de M. Appell.

c. Si l'on particularise la fonction caractéristique $A(x, y)$, l'opération A pourra servir, non seulement à la transformation des fonctions φ, mais encore à la transformation des équations fonctionnelles auxquelles elles satisfont. Cette transformation s'opère au moyen de la relation (11) et des égalités

$$A\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \sum n c_n A_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} A(\varphi) = \sum c_n \frac{dA_n(x)}{dx}.$$

Je me propose de revenir sur l'étude de cette transformation d'équations fonctionnelles (équations différentielles, aux différences, etc.) notamment pour le cas où la fonction caractéristique est l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Pour le moment, je me bornerai à citer les transformations des équations différentielles linéaires en équations différentielles ou aux différences finies linéaires, données par les opérations considerées aux §§ 19—20, et en particulier par la transformation de Laplace. Rappelons aussi les transformations d'équations linéaires données par M. Appell aux §§ 14—16 de son mémoire déjà cité: *Sur une classe de polynômes.*

---

27. Nous avons considéré jusqu'ici le cas où la variable x est prise à l'intérieur du champ $E_m(\alpha, \rho)$. Supposons maintenant qu'elle soit prise

à l'intérieur du champ $E_0(\alpha, \rho)$. Pour de telles valeurs de x, aucune singularité de $A(x, y)$ ne se trouve à l'intérieur du cercle (α, ρ); on peut donc écrire, pour x à l'intérieur de $E_0(\alpha, \rho)$ et pour $|y| \leqq \rho$:

$$A(x, y) = \sum_0^\infty \frac{1}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n}(y - \alpha)^n.$$

Soit maintenant $\varphi(y)$ une fonction analytique uniforme, pour laquelle je conserve les mêmes hypothèses et notations qu'au § 23; on aura:

$$(13) \qquad A(i_\rho \varphi) = 0, \qquad A(\varphi) = A(j_\rho \varphi)$$

et

$$(14) \qquad A(\varphi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c'_n}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n}.$$

Ce développement se continue analytiquement dans les champs $E_0(\alpha_1, \rho_1)$, $E_0(\alpha_2, \rho_2)$, ... dont chacun a une partie commune avec le précédent, au moyen des développements

$$\sum \frac{c_n^{(1)}}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1^n}, \qquad \sum \frac{c_n^{(2)}}{|\underline{n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha_2)}{\partial \alpha_2^n}, \quad \ldots .$$

Je n'insiste pas sur des remarques analogues à celles que l'on a faites pour le cas précédent, et qu'il serait facile de répéter ici.

28. Enfin, on peut considérer le cas où l'on prend x dans une des aires

$$E_1(\alpha, \rho), \qquad E_2(\alpha, \rho), \quad \ldots, \quad E_{m-1}(\alpha, \rho).$$

Les fonctions analytiques représentées par $A(\varphi)$ dans ces divers champs se déduisent de celles qu'on vient d'étudier, par l'application du théorème de M. Hermite;[1] je ne reviens pas ici sur cette application que j'ai déjà donnée,[2] non plus que sur les conséquences qu'on en déduit.

---

[1] Voir le mémoire: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* (Acta Soc. Scient. Fennicæ, T. 12, 1881.)

[2] V. mon mémoire déjà cité, § 34, et ma note *Sur une formule dans la théorie des fonctions* (Öfversigt af Svenska Vetensk. Akad. Förhandl. 1886, p. 51—55).

29. Nous avons appris, aux §§ 16 et 17, à déterminer formellement la fonction $\mathbf{A}(y, t)$ que nous avons appelée *réciproque* de $A(x, y)$.

Supposons à présent que cette fonction ait une existence effective, et que les singularités de cette fonction soient les couples de valeurs qui vérifient une équation de degré m':

$$\mathfrak{F}(y, t) = 0.$$

J'indiquerai par $\mathbf{E}_h(\alpha, \rho)$ la région du plan t où h singularités de $\mathbf{A}(y, t)$ tombent à l'intérieur du cercle (α, ρ). Supposons enfin que la ligne d'intégration l' de l'opération réciproque soit dans le champ $\mathbf{E}_0(\alpha, \rho)$.

Cela posé, proposons-nous le problème suivant. Etant donnée une fonction $\psi(x)$ dans le champ $E_m(\alpha, \rho)$, on demande de la développer en série de fonctions $A_n(x)$:

$$(15) \qquad \psi(x) = \sum c_n A_n(x),$$

problème qui revient à la détermination du système de coefficients c_n.

A cet effet, formons

$$\int_{l'} \mathbf{A}(y, t)\psi(t)dt = \varphi(y);$$

puisque la ligne l' est contenue dans le champ $\mathbf{E}_0(\alpha, \rho)$, on aura le long de cette ligne:

$$\mathbf{A}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-\alpha)^n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n \mathbf{A}(\alpha, t)}{\partial \alpha^n},$$

d'où

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y-\alpha)^n$$

avec

$$(16) \qquad c_n = \frac{1}{\underline{|n}} \int_{l'} \frac{\partial^n \mathbf{A}(\alpha, t)}{\partial \alpha^n} \psi(t)dt.$$

Cette formule (lorsque elle a un sens) nous détermine les coefficients du développement cherché (15). Ce développement pourra n'être pas unique, parce que la ligne l' elle-même pourra admettre plusieurs déter-

minations, et alors on pourra former avec les fonctions $A_n(x)$ des développements de zéro.[1]

30. En certains cas, le problème précédent se simplifie beaucoup. Si, par exemple, la fonction $\psi(x)$ est déjà connue sous la forme

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^n}, \qquad |\alpha_\nu - \alpha| > \rho,$$

les coefficients c_n s'obtiennent sans recourir à la fonction réciproque: ils ne sont en effet que les coefficients du développement de la fonction

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,n}}{(y - \alpha_\nu)^{n+1}}$$

en série de puissances entières et positives de $y - \alpha$.

En particulier, si la fonction $\psi(x)$ est de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{n=0}^{r_\nu} \frac{a_{\nu,n}}{\underline{|n}} \frac{\partial^n A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^n},$$

elle est développable en une série de fonctions $A_n(x)$ à coefficients récurrents.

31. Supposons que nous ayons obtenu le développement d'une fonction $\psi(x)$ en série $A_n(x)$, et cherchons le développement de la même fonction en série de polynômes $h_n(A)$. (V. § 26 b); en faisant désormais $\alpha = 0$ pour simplifier l'écriture.

Soit donc

$$A(\varphi) = \psi(x), \qquad \varphi(y) = \Sigma c_n y^n, \qquad \psi(x) = \Sigma c_n A_n(x);$$

on aura à résoudre l'équation fonctionnelle en φ_1:

$$(17) \qquad A(\varphi_1 \chi) = \psi(x),$$

où l'on a posé

$$\chi(y) = \sum \frac{h_\mu}{y^\mu};$$

[1] Sur ces développements, v. pour un cas particulier remarquable: FROBENIUS, *Über die Entwickelungen,* etc. (Journal de CRELLE, T. 73.) V. aussi mon second mémoire *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie* etc. (Annali di Matematica, S. II, T. XII, p. 127.)

c'est-à-dire que l'on demande le système de coefficients c'_n tel que:

$$\varphi_1(y) = \Sigma c'_n y^n, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = \Sigma c'_n h_n(A).$$

Or, cette équation (17) se résout sans difficulté, par suite de la remarque du § 26, en prenant

$$\varphi_1(y) = i_\eta \frac{\varphi(y)}{\chi(y)},$$

ce qui signifie que l'on développe le quotient $\frac{\varphi}{\chi}$ en série de LAURENT dans une couronne qui comprenne la circonférence ρ; et que l'on prend la partie de cette série qui contient les puissances positives de y.

32. L'on peut encore se proposer la solution de l'équation fonctionnelle en φ_1

$$A(\varphi_1\chi) = 0. \tag{18}$$

Il suffira pour cela que la fonction $\varphi_1\chi$ soit développable sur la circonférence (0, ρ) et en dehors, en une série de puissances négatives de y, ($i\varphi_1\chi = 0$). D'où il résulte, puisque φ_1 doit être régulière dans tout le cercle (0, ρ), circonférence comprise, que φ_1 doit se réduire à une fonction rationnelle, diviseur de χ. Cette fonction φ_1 nous donne donc les coefficients (récurrents) d'un développement de zéro en série de polynômes $h_n(A)$.

---

33. Comme application de ce qui précède, supposons que la fonction caractéristique soit de la forme $A(y - x)$, où $A(z) = \sum \frac{a_n}{z^{n+1}}$ est une fonction uniforme dont toutes les singularités (qu'il n'est pas nécessaire, pour le moment, de spécifier davantage) sont à l'intérieur du cercle (0, R). Le champ du plan x, pour lequel les singularités de $A(y - x)$ sont toutes à l'intérieur du cercle (0, $\rho > R$), est l'intérieur du cercle (0, $\rho - R$).

Pour tout point α du cercle (0, $\rho - R$), la fonction $A(y - \alpha)$ admet le développement en série:

$$A(y - x) = \sum \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}$$

convergente pour toutes les valeurs de $|y| > \rho$. Les fonctions $A_n(x)$ forment un système de polynômes de M. Appell; en effet, on a, en indiquant les dérivées par des accents:

$$A'(y - x) = \sum \frac{A'_n(x)}{y^{n+1}} = \sum \frac{(n + 1)A_n(x)}{y^{n+2}},$$

d'où

$$A'_n(x) = nA_{n-1}(x),$$

qui est la relation caractéristique de ces polynômes.

34. Si $\varphi(y)$ est une fonction analytique uniforme qui n'a aucune singularité le long de la circonférence $(0, \rho)$, et en conservant les notations du § 23, on aura:

$$A(\varphi) = A(i\varphi) = \Sigma c_n A_n(x).$$

C'est là le développement que M. Appell indique par $\varphi(A)$. Ce développement converge dans le cercle $(0, \rho - R)$, si $i\varphi$ converge dans le cercle ρ.[1]

On pourra sans difficulté répéter pour ce cas particulier les considérations faites au § 24, au sujet des divers cas auxquels pourra donner lieu la fonction $\varphi(y)$.

35. Etant donnée une fonction $\psi(x)$, on demande de la développer en série de polynômes $A_n(x)$. Les coefficients du développement seront donnés par la formule (16), où $\mathbf{A}(y, t)$ est la fonction réciproque de $A(x, y)$. Mais pour déterminer cette fonction, il suffit de la prendre sous la forme

$$\mathbf{A}(y - t) = \sum \frac{\alpha_n}{(y - t)^{n+1}}$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} A(x - y)\mathbf{A}(y - t)\,dy = \frac{1}{t - x};$$

d'où l'on déduit aisément le système d'équations qui détermine les coefficients α_n:

$$(19) \qquad \begin{cases} \alpha_0 a_0 = 1, \\ \alpha_0 a_n + \binom{n}{1}\alpha_1 a_{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_n a_0 = 0. \end{cases}$$

---

[1] Cfr. ma note: *Alcune osservazioni sui polinomi del prof.* Appell. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. IV, T. II.)

De ces relations il résulte

$$(19') \qquad \sum \frac{\alpha_n}{\underline{|n}} z^n = \frac{1}{\sum \frac{a_n}{\underline{|n}} z^n},$$

ce qui prouve que les polynômes de M. Appell formés avec les coefficients α sont les *inverses*[1] de ceux formés avec les coefficients a.

Les équations (19) donnent la solution *formelle* du problème; ce sera une solution *effective* s'il existe une circonférence $(0, \rho)$ le long de laquelle les deux séries

$$A(x-y) = \sum \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}, \qquad \mathbf{A}(y-t) = \sum \frac{y^n}{\underline{|n}} \mathbf{A}^{(n)}(t)$$

convergent ensemble uniformément. Toutefois, la transformation de Laplace permet facilement de déduire la solution effective du problème de la solution formelle.

36. Nous trouvons ainsi, pour les coefficients de développement de $\phi(x)$ en série de $A_n(x)$, la formule

$$2\pi i c_n = \frac{1}{\underline{|n}} \int_{(\rho)} \mathbf{A}^{(n)}(t)\phi(t)dt.$$

Supposons que la fonction $\mathbf{A}(t)$ soit, dans un cas particulier, de la forme:

$$\mathbf{A}(t) = \sum \frac{h_\nu}{t - \alpha_\nu}$$

où les points α_ν sont intérieurs au cercle ρ; d'ailleurs les formules (19) ou (19') permettent de trouver quelle sera, dans ce cas, la forme des polynômes $A_n(x)$. Il en résulte

$$\frac{\mathbf{A}^{(n)}(t)}{\underline{|n}} = \sum \frac{h_\nu}{(t-\alpha_\nu)^{n+1}}$$

d'où, si le cercle de convergence de ϕ est plus grand que ρ:

$$2\pi i c_n = h_1 \phi^{(n)}(\alpha_1) + h_2 \phi^{(n)}(\alpha_2) + \ldots + h_\nu \phi^{(n)}(\alpha_\nu) + \ldots.$$

[1] Appell, Mém. cité, § 3.

La fonction $\psi(x)$ satisfait donc, dans ces hypothèses, à l'équation

$$(20) \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [h_1 \psi^{(n)}(\alpha_1) + h_2 \psi^{(n)}(\alpha_2) + \ldots] A_n(x).$$

C'est là une formule donnée par M. Halphen. (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1881, T. 93, p. 781.)

Une autre formule trouvée par le même auteur (ibid., p. 832) se déduit avec la même facilité. Nous venons d'apprendre à résoudre l'équation en $F(y)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int A(y-x)F(y)dy = f(x).$$

Or en mettant $x+t$, $y+t$ à la place de x, y, il vient:

$$f(x+t) = \frac{1}{2\pi i}\int A(y-x)F(y+t)dy;$$

et d'après les développements ci-dessus:

$$(21) \qquad f(x+t) = \sum A_n(x) \frac{F^{(n)}(t)}{\underline{|n}}.$$

C'est la seconde formule de M. Halphen, qu'on peut regarder comme une généralisation du théorème de Taylor. Il s'y manifeste une sorte de *dualité*, qu'il serait aisé de poursuivre, entre les systèmes de polynômes de M. Appell et les systèmes de dérivées successives d'une même fonction.

ÜBER EINE GATTUNG TRANSCENDENTER RAUMCOORDINATEN

VON

OTTO STAUDE
in DORPAT.

Die bekannte Darstellung der geodätischen Linie auf den Flächen 2. Grades durch hyperelliptische Functionen zweier Veränderlicher und verschiedene ähnliche Anwendungen der genannten Functionen weisen auf eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten hin, durch deren Einführung jene Anwendungen auf einen gemeinsamen Ausgangspunct zurückgeführt werden. Statt zur Darstellung einzelner Raumgebilde einen oder zwei Parameter durch die Integralsummen des JACOBI'schen Umkehrproblems zu definiren, kann man nämlich zuerst darauf ausgehen, alle Puncte des Raumes durch drei unabhängige Summen von je drei hyperelliptischen Integralen darzustellen und die geometrische Discussion entsprechender räumlicher Gebilde an den Gebrauch dieser transcendenten Coordinaten zu knüpfen. Im Folgenden sind als typische Formen drei verschiedene Darstellungen der Puncte des Raumes durch drei unabhängige Parameter der angedeuteten Art in Kürze zusammengestellt.

Dabei ist nicht sowohl auf die mannigfachen geometrischen Sätze Rücksicht genommen, welche als gemeinsame Folgerungen aus jeder einzelnen dieser Darstellungen sich ergeben, als vielmehr auf mechanische Bedeutungen der letzteren. An den herangezogenen einfachsten Beispielen mechanischer Vorgänge, deren analytische Behandlung auf hyperelliptische Functionen 1. oder 2. Ordnung führt, wird überdies auf eine charakteristische Unterscheidung der betreffenden Bewegungsvorgänge hinge-

wiesen. Bei der Anwendung der hyperelliptischen Functionen auf die Darstellung der Bewegungen kommt nämlich wesentlich in Frage, wie viele von den reellen Periodicitätsmoduln, respective Systemen zusammengehöriger Periodicitätsmoduln bei dem einzelnen Falle zur Geltung gelangen. Dieser Frage parallel geht die andere, ob die betreffende Bewegung eine unmittelbar periodische oder eine nur unter gewissen Bedingungen periodisch werdende ist. Eine darauf beruhende Gruppirung aller Bewegungsvorgänge[1] findet an den hier behandelten Darstellungen der Raumpuncte ihre einfachste Erläuterung.

§ 1. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale 2. Gattung vom Geschlecht 2.*

Die gewöhnlichen Coordinaten x, y, z eines Punctes im Raume drücken sich durch die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν desselben in der bekannten Weise aus:

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}},\\
y &= \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}},\\
z &= \sqrt{\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}},
\end{aligned}
\right.
$$

wo α, β, γ die Constanten des elliptischen Coordinatensystems bedeuten und die Ungleichungen

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha$$

bestehen.

---

[1] Vgl. *Über periodische und bedingt periodische Bewegungen,* Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft bei der Universität Dorpat, 1886; *Über bedingt periodische Bewegungen,* ebend., 1887.

Zwischen den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν und drei neuen Coordinaten u_1, u_2, u_3 mögen nun die folgenden Relationen angenommen werden:

$$(2)\qquad \left|\begin{aligned}
u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}\right.$$

worin:

$$(3)\qquad r(\rho) = (\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)$$

ist und λ_0, μ_0 zwei besondere Werthe der gleichnamigen Coordinaten λ, μ bedeuten. Indem man aus diesen 3 Gleichungen, welche das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 2. Gattung[1] vom Geschlecht 2 enthalten, die symmetrischen Functionen (1) der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν berechnet, erhält man x, y, z als eindeutige Functionen der drei neuen Coordinaten u_1, u_2, u_3 dargestellt, nämlich:

$$(4)\qquad \left|\begin{aligned}
x &= \frac{\theta}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\,\frac{\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} + \frac{\theta_{40}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)}E(u_1, u_2, u_3)\right\},\\
y &= \frac{\theta_{43}}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\beta-\lambda_0}\,\frac{\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} - \frac{\theta_{03}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)}E(u_1, u_2, u_3)\right\},\\
z &= \frac{\theta_{41}}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\,\frac{\theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} - \frac{\theta_{01}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)}E(u_1, u_2, u_3)\right\},
\end{aligned}\right.$$

worin:

$$(5)\qquad \begin{aligned}
E(u_1, u_2, u_3) = u_3 &+ \frac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}}u_1 + \frac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}}u_2\\
&- \frac{\partial \log\theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log\theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}.
\end{aligned}$$

---

[1] Vgl. Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen*, Leipzig 1866, S. 150.

Dabei ist, mit den modificirten WEIERSTRASS'schen Indices[1] bezeichnet,

$$\Theta_{ik}(u_1, u_2) = \vartheta_{ik}(v_1, v_2),$$

wo $\vartheta_{ik}(v_1, v_2)$ die gewöhnliche Thetafunction zweier Argumente v_1, v_2 und dreier Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} und ferner

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} v_1 = \dfrac{u_1B_2 - u_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\dfrac{\pi i}{2}, & v_2 = \dfrac{A_1u_2 - A_2u_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\dfrac{\pi i}{2}; \\ a_{11} = -\dfrac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\pi, & a_{12} = -\dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\pi, \\ \multicolumn{2}{c}{a_{22} = -\dfrac{A_1D_2 - A_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\pi} \end{array}\right.$$

zu setzen ist. Die reellen Constanten dieser Ausdrücke haben die Werthe:

$$(7)\quad A_h = \int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h, \qquad B_h = -\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, \qquad C_h = \int_{\lambda_0}^{\gamma} d\omega_h', \qquad D_h = -\int_{\alpha}^{\infty} d\omega_h';$$

sie sind auf reellem Integrationswege mit den Differentialen:

$$d\omega_1 = \frac{(\rho - \mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \quad d\omega_2 = \frac{(\rho - \lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \quad d\omega_1' = \frac{(\rho - \mu_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, \quad d\omega_2' = \frac{(\rho - \lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}$$

zu berechnen, in welchen $\sqrt{\pm r}$ den positiven Werth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet.

Aus der in (4) gegebenen Parameterdarstellung aller Raumpuncte durch eindeutige vierfach periodische Functionen dreier unabhängiger Argumente u_1, u_2, u_3 gehen als specielle Fälle die verschiedenen bekannten Parameterdarstellungen im Gebiete der confocalen Flächen 2. Grades hervor:

Die Functionen (4) sind in u_3 linear; für $u_1 = a_1, u_2 = a_2$ mit zwei Constanten a_1, a_2, erhält man daher in (4) die Puncte einer geraden

[1] Vgl. Acta mathematica, Bd. 8, S. 84.

Linie, welche, wie ihre Differentialgleichungen in elliptischen Coordinaten:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\dfrac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\dfrac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\\[2ex] \dfrac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\dfrac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\dfrac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0, \end{cases}$$

erkennen lassen, mit den Flächen

$$\nu=\alpha,\qquad \nu=\beta,\qquad \mu=\gamma,\qquad \mu=\mu_0,\qquad \lambda=\lambda_0$$

des confocalen Flächensystems der elliptischen Coordinaten je 2 unendlich nahe Puncte gemein hat, also gemeinsame Tangente der Flächen $\lambda=\lambda_0$ und $\mu=\mu_0$ ist[1]. Die Formeln (4) liefern in diesem Falle mit $u_3=ct$, unter c eine Constante und unter t die Zeit verstanden, zugleich die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes im Raume und die Beziehung zwischen den beiderseitigen Integrationsconstanten in den zwei von JACOBI gegebenen Formen[2] der Gleichungen der Trägheitsbewegung als der Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen, welches aus (8) unter Hinzufügung der dritten Gleichung

$$(8')\quad \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=c\,dt$$

entsteht.

Für $\lambda=\lambda_0$ verschwinden in den 3 Gleichungen (2) die ersten Glieder der rechten Seiten, und zwischen den entstehenden 3 Summen u_1, u_2, u_3 von je 2 Integralen besteht die Relation:

$$(9)\quad E(u_1,\ u_2,\ u_3)=0,$$

die mit Rücksicht auf die Definition (5) nichts anderes ist, als die Darstellung der Summe zweier Integrale 2. Gattung u_3 durch die Summen je zweier Integrale 1. Gattung u_1 und u_2. Die Gleichung (9) ist die

---

[1] Vgl. KLEIN, *Zur geometrischen Deutung des ABEL'schen Theorems*, Mathem. Ann. Bd. 28, S. 533.

[2] Vgl. JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik, herausg. von* CLEBSCH, S. 233.

Gleichung des Ellipsoides $\lambda = \lambda_0$ in den Coordinaten u_1, u_2, u_3. Zugleich reduciren sich die Formeln (4) für die Puncte dieses Ellipsoides auf die bekannten Formeln:[1]

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}} &= \frac{\theta\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta_{45}\theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{y}{\sqrt{\beta - \lambda_0}} &= \frac{\theta_{42}\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta_{45}\theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{z}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} &= \frac{\theta_{41}\theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta_{45}\theta(u_1, u_2)}. \end{aligned}\right.$$

Besteht zwischen u_1, u_2, u_3 neben der Gleichung (9) noch die fernere Gleichung $u_2 = a_2$, so erhält man in (10) die geodätischen Linien und zugleich die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$, deren Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{(\mu - \lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \frac{(\nu - \lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = 0$$

$$\frac{(\mu - \mu_0)(\mu - \lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \frac{(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = c\,dt.$$

Man hat in der letzteren Auffassung u_1 durch die Gleichung:

$$u_1 = c\int_{t_0}^{t} \frac{(\mu_0 - \lambda_0)\,dt}{(\mu - \lambda_0)(\nu - \lambda_0)}$$

mit einer Constanten t_0 als eindeutige Function von t für alle reellen Werthe von t definirt zu denken.[2] In den Formeln (4) vereinigen sich also die Darstellungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes im Raume und auf der Fläche zweiten Grades.

---

[1] Vgl. Acta mathematica, Bd. 8, S. 84.

[2] Vgl. WEIERSTRASS, *Über geodätische Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid,* Monatsberichte der Berliner Akademie 1861, S. 986.

§ 2. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* 3. *Gattung vom Geschlecht* 2.

Die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν mögen ferner ersetzt werden durch 3 Coordinaten u_1, u_2, u_3, welche mit ihnen verbunden sind durch folgende Gleichungen:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}
\right.
$$

wo jetzt unter $r(\rho)$, anders als in § 1, eine ganze Function 6. Grades:

$$
(2)\qquad r(\rho) = -(\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)(\lambda_1-\rho)
$$

verstanden wird und λ_0, λ_1, μ_0 $(\lambda_1 < \lambda_0)$ specielle Werthe der gleichnamigen Coordinaten sind. Es ist daher jetzt u_3 eine Summe von hyperelliptischen Integralen 3. Gattung mit den logarithmischen Unendlichkeitspuncten $\rho = \infty$.

Die Berechnung der symmetrischen Functionen § 1, (1) der oberen Grenzen λ, μ, ν der Integralsummen u_1, u_2, u_3 giebt jetzt:

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\lambda_1)}} &= \frac{P(u_1,\,u_2,\,u_3)}{T(u_1,\,u_2,\,u_3)},\\
\frac{y}{\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\beta-\lambda_1)}} &= \frac{Q(u_1,\,u_2,\,u_3)}{T(u_1,\,u_2,\,u_3)},\\
\frac{z}{\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\gamma-\lambda_1)}} &= \frac{R(u_1,\,u_2,\,u_3)}{T(u_1,\,u_2,\,u_3)},
\end{aligned}
\right.
$$

worin T, P, Q, R die Bedeutung haben:

(4)
$$T(u_1, u_2, u_3)$$
$$= \sqrt{(\alpha-\lambda_0)P^2(u_1, u_2, u_3)+(\beta-\lambda_0)Q^2(u_1, u_2, u_3)+(\gamma-\lambda_0)R^2(u_1, u_2, u_3)+(\lambda_0-\lambda_1)S^2(u_1, u_2, u_3)},$$

(5)
$$\begin{cases} P(u_1, u_2, u_3) = \theta_{05}(c_1, c_2)\{e^{iu'_3}\theta_{40}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu'_3}\theta_{40}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ Q(u_1, u_2, u_3) = \theta_{21}(c_1, c_2)\{e^{iu'_3}\theta_{03}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu'_3}\theta_{03}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ R(u_1, u_2, u_3) = \theta_{23}(c_1, c_2)\{e^{iu'_3}\theta_{01}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu'_3}\theta_{01}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ S(u_1, u_2, u_3) = \theta_{40}(c_1, c_2)\{e^{iu'_3}\theta_{05}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu'_3}\theta_{05}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \end{cases}$$

wo ferner:

(6)
$$u'_3 = u_3 - i\frac{\partial \log \theta_{45}(c_1, c_2)}{\partial c_1}u_1 - i\frac{\partial \log \theta_{45}(c_1, c_2)}{\partial c_2}u_2$$

ist und die rein imaginären Constanten c_1, c_2 die Werthe haben:

(7)
$$c_1 = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \qquad c_2 = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}.$$

Die Argumente und Parameter der Thetafunctionen haben die Werthe wie in den Formeln § 1, (6), (7) nur dass in diesen $r(\rho)$ jetzt die neue Bedeutung (2) besitzt. Die Quadratwurzel T verschwindet, wie leicht aus bekannten Sätzen über das gleichzeitige Verschwinden mehrerer Thetafunctionen $\theta_{\alpha}(u_1, u_2)$ hergeleitet werden kann, für kein reelles Werthepaar u_1, u_2, u_3; sie hat überdies, wie auch P, Q, R, S für reelle Argumente u_1, u_2, u_3 auch reelle Werthe. Die doppelt gestrichene Quadratwurzel bedeutet den positiven Werth von T.

Die Darstellung (3) der Puncte des Raumes durch fünffach periodische Functionen der drei Argumente u_1, u_2, u_3 ist im reellen Gebiete eine eindeutige, sobald man für T einmal das positive Vorzeichen festgesetzt hat. Aus dieser Parameterdarstellung aller Raumpuncte ergeben sich folgende specielle Formen:

Wenn man die beiden Variablen u_1, u_2 constant, gleich a_1, a_2 setzt, so bleibt in den Formeln (3) nur u'_3 variabel, und man übersieht, dass bei den gemachten Festsetzungen die Formeln (3) eine Ellipse darstellen,

deren Mittelpunct der Coordinatenanfang ist. Aus den Differentialgleichungen dieser Ellipse in elliptischen Coordinaten:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\\ &\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\end{aligned}\right.$$

folgt anderseits sofort, dass diese Ellipse mit den Flächen

$$\nu=\alpha,\qquad \nu=\beta,\qquad \mu=\gamma,\qquad \mu=\mu_0,\qquad \mu=\lambda_0,\qquad \lambda=\lambda_1,$$

so oft sie denselben begegnet, je zwei unendlich nahe Puncte gemein hat, also die Flächen μ_0, λ_0, λ_1 je in zwei diametral gegenüberliegenden Puncten berührt.[1]

Mit $u_3 = gt$ hat man in (3) unmittelbar die Gleichungen der Centralbewegung eines materiellen Punctes x, y, z unter Einfluss der vom Coordinatenanfang ausgehenden Anziehungskraft von der Grösse g^2r, unter r die Entfernung des bewegten Punctes von letzterem verstanden.[2]

Für $\lambda = \lambda_0$ verschwinden in den 3 Gleichungen (1) die ersten Glieder der rechten Seiten und zwischen den entstehenden 3 Summen von je 2 Integralen besteht die Relation:

$$(9)\quad u_3=\frac{1}{2i}\log\frac{\theta(u_1+c_1,\ u_2+c_2)}{\theta(u_1-c_1,\ u_2-c_2)}+i\frac{\partial\log\theta_{45}(c_1,\ c_2)}{\partial c_1}u_1+i\frac{\partial\log\theta_{45}(c_1,\ c_2)}{\partial c_2}u_2,$$

welche die Darstellung der Summe zweier Integrale 3. Gattung u_3 durch die Summen je zweier Integrale 1. Gattung u_1, u_2 ist. Man kann diese Relation auch schreiben:

$$\frac{e^{iu'_3}}{e^{-iu'_3}}=\frac{\theta(u_1+c_1,\ u_2+c_2)}{\theta(u_1-c_1,\ u_2-c_2)}.$$

---

[1] Vgl. *Über Verallgemeinerungen des* GRAVES'*schen Theorems in der analytischen Mechanik*, Berichte d. K. Sächs. Ges. d. W., 1886; ferner KLEIN: *Zur geometrischen Deutung des* ABEL'*schen Theorems der hyperelliptischen Integrale*, Mathematische Annalen, Bd. 28.

[2] Vgl. JACOBI, a. a. O., S. 234.

Die Formeln (3) reduciren sich in Folge derselben auf:

$$(10)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\lambda_1)}} = \dfrac{\theta\,\theta_{45}(u_1,\ u_2)}{T}, \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\beta-\lambda_1)}} = \dfrac{\theta_{43}\,\theta_{35}(u_1,\ u_2)}{T}, \\[2ex] \dfrac{z}{\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\gamma-\lambda_1)}} = \dfrac{\theta_{41}\,\theta_{51}(u_1,\ u_2)}{T}, \end{array}\right.$$

mit

$$T = \sqrt{(\alpha-\lambda_0)\theta^2\theta_{45}^2(u_1, u_2) + (\beta-\lambda_0)\theta_{43}^2\theta_{35}^2(u_1, u_2) + (\gamma-\lambda_0)\theta_{41}^2\theta_{51}^2(u_1, u_2) + (\lambda_0-\lambda_1)\theta_{45}^2\theta^2(u_1, u_2)},$$

wie leicht aus den Additionstheoremen der Thetafunctionen folgt. Diese Formeln (10) gehen ihrerseits mit $\lambda_1 = -\infty$ in die Formeln § 1, (4) über, da neben (10) noch die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_1)(\nu-\lambda_1)}{(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_1)(\gamma-\lambda_1)}} = \frac{\theta_{45}\,\theta(u)}{T}$$

besteht. Die in den Gleichungen (10) enthaltene Darstellung der Puncte des Ellipsoides λ_0 durch zwei unabhängige Parameter ist im reellen Gebiete eindeutig.

Besteht neben der Gleichung (9) auch noch die Gleichung $u_2 = a_2$, so erhält man in (10) die Puncte derjenigen Curven auf dem Ellipsoid λ_0, welche von den eben erwähnten Ellipsen umhüllt werden und ähnlich wie die geodätischen Linien verlaufen, eindeutig durch den Parameter u_1 dargestellt. Macht man u_1 durch die Formel:

$$u_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{g(\mu_0-\lambda_0)\,dt}{(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)}$$

eindeutig von der Zeit t abhängig, so sind die Gleichungen (10) die Bewegungsgleichungen eines Punctes, der auf dem Ellipsoid λ_0 unter dem Einfluss der Centralkraft $g^2 r$ sich bewegt.

In der Parameterdarstellung (3) vereinigen sich also die Gleichungen der freien und der an das Ellipsoid λ_0 gebundenen Bewegung eines materiellen Punctes unter Einfluss einer centralen Anziehungskraft, welche der Entfernung direct proportional ist.

§ 3. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* I. *Gattung vom Geschlecht* 3.

Es sollen endlich die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν mit 3 anderen Coordinaten u_1, u_2, u_3 durch die folgenden Relationen verbunden sein:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\ u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\ u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}, \end{aligned}\right.$$

worin:

$$(2)\qquad r(\rho) = (\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)(\lambda_1-\rho)(\lambda_2-\rho)$$

und μ_0, λ_0, λ_1, $\lambda_2(\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2)$ besondere Werthe der gleichnamigen Coordinaten sind. Die Integrale in diesen Gleichungen sind von der I. Gattung vom Geschlecht 3.

Um die symmetrischen Functionen der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν durch u_1, u_2, u_3 darzustellen, setzt man:

$$(3)\qquad \theta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'\end{pmatrix}(u_1, u_2, u_3) = \vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'\end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3) = \sum_{m_1}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m_2}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m_3} e^{A+2V}$$

mit:

$$A = a_{11}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + a_{22}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + a_{33}\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^2$$

$$+ 2a_{23}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right) + 2a_{31}\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right) + 2a_{12}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right),$$

$$V = \left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1+\varepsilon_1'\frac{\pi i}{2}\right) + \left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2+\varepsilon_2'\frac{\pi i}{2}\right) + \left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\left(v_3+\varepsilon_3'\frac{\pi i}{2}\right).$$

Dabei bestehen zwischen u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 die Relationen:

(4) $$v_h = (c_{h1} u_1 + c_{h2} u_2 + c_{h3} u_3)\pi i, \qquad (h = 1, 2, 3)$$

und haben die 9 Coefficienten c_{h1}, c_{h2}, c_{h3} die Bedeutung:

$$c_{h_1 k_1} = \frac{1}{\Delta}(A_{k_2}^{h_2} A_{k_3}^{h_3} - A_{k_3}^{h_2} A_{k_2}^{h_3}),$$

wo die Indicestripel $h_1 h_2 h_3$ und $k_1 k_2 k_3$ unabhängig von einander die Zahlentripel 123, 231, 312 durchlaufen und

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}.$$

Die Parameter a_{hk} der Thetafunction haben die Werthe:

(5) $$a_{hk} = -(c_{h1} B_1^k + c_{h2} B_2^k + c_{h3} B_3^k)\pi, \qquad (h, k = 1, 2, 3)$$

wobei $a_{hk} = a_{kh}$. Endlich sind unter A_h^k, B_h^k die auf reellem Integrationswege berechneten reellen Constanten zu verstehen:

(6) $$\begin{aligned} A_h^1 &= 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_h - 2\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h + 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B_h^1 &= 2\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} d\omega_h' \\ A_h^2 &= \qquad\quad - 2\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h + 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B_h^2 &= -2\int_{\lambda_0}^{\gamma} d\omega_h' \\ A_h^3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B_h^3 &= 2\int_{\mu_0}^{\beta} d\omega_h', \end{aligned}$$

mit folgender Bedeutung der Differentiale $d\omega_h$ und $d\omega_h'$:

(7) $$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, & d\omega_2 &= \frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, & d\omega_3 &= \frac{(\rho-\mu_0)(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \\ d\omega_1' &= \frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, & d\omega_2' &= \frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, & d\omega_3' &= \frac{(\rho-\mu_0)(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, \end{aligned}$$

unter $\sqrt{\pm r}$ allgemein die positive Quadratwurzel aus der positiven reellen Grösse $\pm r$ verstanden.

Indem man endlich die Thetafunctionen mit den WEIERSTRASS'schen Indices[1] bezeichnet, erhält man:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{056}\,.\,\theta_{146}(u_1,\ u_2,\ u_3)}{\theta_{146}\,.\,\theta_{056}(u_1,\ u_2,\ u_3)},\\
\frac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= \frac{\theta_0\,.\,\theta_{145}(u_1,\ u_2,\ u_3)}{\theta_{146}\,.\,\theta_{056}(u_1,\ u_2,\ u_3)},\\
\frac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{126}\,.\,\theta_{137}(u_1,\ u_2,\ u_3)}{\theta_{146}\,.\,\theta_{056}(u_1,\ u_2,\ u_3)},
\end{aligned}
\right.
$$

wo den ohne Argumente geschriebenen Thetafunctionen die Argumente 0, 0, 0 zuzudenken sind. Die Coordinaten x, y, z werden hierbei reell für reelle Werthe von u_1, u_2, u_3.

Diese eindeutige Parameterdarstellung der Puncte des Raumes durch

---

[1] Vgl. HENOCH, *De Abelianarum functionum periodis,* (Berolini, 1867) S. 15, wobei im vorliegenden Text nur die zweiziffrigen Indices bei HENOCH durch Hinzufügung der Ziffer 7 in dreiziffrige verwandelt sind, sodass von den 64 Thetafunctionen 8 je eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7, 56 aber je 3 dieser Zahlen als Indices bekommen. Eine zweite Indicesbezeichnung wäre dadurch geboten, dass eine Thetafunction keinen Index, 28 Thetafunctionen je 2 der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 und 35 je eine Scheidung der 8 Zahlen in 2 Quadrupel als Charakteristik bekommen. Man kann es dann für den hyperelliptischen Fall so einrichten, dass die gerade Thetafunction, welche für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ verschwindet, keinen Index bekommt, die 28 ungeraden Thetafunctionen je 2 Indices und die 35 übrigen geraden der Spaltung der in irgend einer Reihenfolge mit $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_7$ bezeichneten 8 Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 in 4 Quadrupel so entsprechen, dass sich die Nullwerthe der Thetafunctionen mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} i_0 i_1 i_2 i_3 \\ i_4 i_5 i_6 i_7 \end{pmatrix}$, mit einem Proportionalitätsfactor k und der Abkürzung $(i_1 i_2) = (a_{i_1} - a_{i_2})$, durch die 8 Verzweigungspuncte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_7$ so darstellen:

$$
k\,.\,\theta\begin{pmatrix} i_0 i_1 i_2 i_3 \\ i_4 i_5 i_6 i_7 \end{pmatrix} = \sqrt[4]{(i_0 i_1)(i_0 i_2)(i_0 i_3)(i_2 i_3)(i_3 i_1)(i_1 i_2)\,.\,(i_4 i_5)(i_4 i_6)(i_4 i_7)(i_6 i_7)(i_7 i_5)(i_5 i_6)}.
$$

Man vgl. über die verschiedene Indicesbezeichnung auch NÖTHER, *Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten,* Mathematische Annalen, Bd. 16, S. 270.

6-fach periodische Functionen dreier Argumente hat ebenfalls eine mechanische Bedeutung.[1] Setzt man nämlich

$$u_1 = a, \qquad u_2 = b, \qquad u_3 = c + gt,$$

unter a, b, c, g Constanten, unter t die Zeit verstehend, so stellen die Gleichungen (8) die freie Bewegung eines Punctes im Raume unter Einfluss der Kräftefunction:

$$(9) \qquad U = -\frac{1}{2}g^2\{L(\lambda + \mu + \nu) - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\}$$

dar. Die 7 Grössen a, b, c, λ_0, μ_0, λ_1, λ_2 vertreten die 6 Integrationsconstanten der Bewegung; zwischen ihnen besteht eine Relation:

$$\lambda_0 + \mu_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = L,$$

welche sie mit der gegebenen Constanten L der Kräftefunction verbindet.

Diese Bewegung dürfte insofern ein gewisses Interesse beanspruchen, als sie ein typisches Beispiel einer durch hyperelliptische Functionen 2. Ordnung dargestellten Bewegung abgiebt. Sie lässt daher in einfachster Form ein charakteristisches Merkmal solcher Bewegungen hervortreten, das der *bedingten Periodicität.*

Um darauf einzugehen, bemerkt man zunächst, dass die 3 imaginären Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln für den Bewegungsvorgang im gewöhnlichen Sinne keine Bedeutung haben. Aber auch die 3 reellen Systeme verlieren ihre directe Bedeutung, da eine Änderung der 3 Argumente u_1, u_2, u_3 um ein System zusammengehöriger Periodicitätsmoduln durch die Festhaltung der Werthe u_1 und u_2 ausgeschlossen wird und daher die betrachtete Bewegung als eine *nicht periodische* sich ergiebt. Dagegen zeigt die Bahncurve des bewegten Punctes eine dreifache Art von Windungen, die man in gewissem Sinne als den Ausdruck der dreifachen reellen Periodicität der betrachteten hyperelliptischen Functionen ansehen kann. Die Bahncurve bewegt sich nämlich, wie man aus ihren Differentialgleichungen in elliptischen Coordinaten

[1] Vgl. Jacobi, a. a. O., S. 219.

leicht erkennt, in dem ringförmigen Raume, welcher von je einem ringförmig geschlossenen Theile der beiden Ellipsoide λ_0 und λ_1 einerseits und von zwei getrennten, je ringförmig geschlossenen Theilen des einschaligen Hyperboloides μ_0 anderseits begrenzt wird. Die Bahncurve umläuft in immer wiederholten Längswindungen diesen in sich zurückkehrenden ringförmigen Raum, macht dabei aber zugleich Querwindungen, indem sie abwechselnd den einen und anderen begrenzenden Theil des Hyperboloides μ_0 berührt, und Tiefenwindungen, indem sie abwechselnd die begrenzenden Theile des einen und anderen der Ellipsoide λ_0 und λ_1 berührt. Die Bahncurve wird sich dabei im Allgemeinen niemals schliessen, da niemals in demselben Zeitpuncte eine Längs-, eine Breiten- und eine Tiefenwindung gleichzeitig sich vollenden. Aber die Bewegung kann insofern als eine *zweifach bedingt periodische Bewegung* bezeichnet werden, als sie in eine periodische Bewegung übergeht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind, welche das periodische Zusammentreffen der 3 Windungsformen der Bahncurve zum Ausdruck bringen. Man kann diese Bedingungen unmittelbar aufstellen. Wenn man nämlich der Einfachheit wegen die Constanten a, b, c specialisirt und $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = gt$ setzt, so erhält man zunächst:

$$v_1 = c_{13} gt\pi i = \frac{A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3}{\Delta} gt\pi i,$$

$$v_2 = c_{23} gt\pi i = \frac{A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1}{\Delta} gt\pi i,$$

$$v_3 = c_{33} gt\pi i = \frac{A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2}{\Delta} gt\pi i.$$

Damit wird das Argument $2V$ der Exponentialgrösse der Thetafunction (3) abgesehen von dem additiven Gliede:

$$(m_1 \varepsilon_1' + m_2 \varepsilon_2' + m_3 \varepsilon_3')\pi i + (\varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' + \varepsilon_3 \varepsilon_3')\frac{\pi i}{2}:$$

(10)
$$2V = \{(2m_1 + \varepsilon_1)(A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3) + (2m_2 + \varepsilon_2)(A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1) \\ + (2m_3 + \varepsilon_3)(A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2)\} \frac{gt\pi i}{\Delta}.$$

Es seien jetzt, unter l, m, n ganze Zahlen verstanden, die beiden Bedingungen erfüllt:

$$(11)\qquad \left| \begin{aligned} & l\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_1 - m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_1 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_1 = 0, \\ & l\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_2 - m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_2 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

und sei zur Abkürzung:

$$(12)\qquad l\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_3 - m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_3 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_3 = gT$$

gesetzt. Man kann diese Gleichungen mit $m' = m - l$, $n' = n - m$ auch schreiben:

$$lA_1^1 + m'A_1^2 + n'A_1^3 = 0,$$

$$lA_2^1 + m'A_2^2 + n'A_2^3 = 0,$$

$$lA_3^1 + m'A_3^2 + n'A_3^3 = 2gT.$$

Hieraus folgt:

$$A_1^2A_2^3 - A_2^2A_1^3 = \frac{\Delta l}{2gT}, \qquad A_1^3A_2^1 - A_2^3A_1^1 = \frac{\Delta m'}{2gT}, \qquad A_1^1A_2^2 - A_2^1A_1^2 = \frac{\Delta n'}{2gT}$$

und somit:

$$2V = \{(2m_1 + \varepsilon_1)l + (2m_2 + \varepsilon_2)m' + (2m_3 + \varepsilon_3)n'\}\frac{\pi i t}{2T}.$$

Einer Änderung des Argumentes t um $4T$ entspricht also eine Änderung des Argumentes $2V$ um ein Vielfaches von $2\pi i$, wobei die Thetafunction (3) ungeändert bleibt.

Während also die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes im Allgemeinen nichtperiodische Functionen der Zeit sind, werden sie periodisch mit der Periode $4T$, sobald die Integrationsconstanten μ_0, λ_0, λ_1, λ_2 die Bedingungen (11) *erfüllen.*

Diese Bedingungen hängen übrigens von dem anfänglichen Orte des bewegten Punctes zur Zeit $t = 0$ nicht ab, auch wenn a, b, c beliebige Werthe haben.

Neben diese Bewegung, welche auf das vollständige Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 3. Gattung:

$$(13)\quad \begin{cases} \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_1 \\ \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_2 \\ \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=gt \end{cases}$$

führt, stellt sich eine unter Einfluss derselben Kräftefunction (9) vor sich gehende, aber an das Ellipsoid λ_0 gebundene Bewegung, entsprechend den Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} \int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_2 \\ \int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=gt, \end{cases}$$

wo $r(\rho)$ wieder die in (2) definirte ganze Function 7. Grades ist. Diese Gleichungen geben bekanntlich im complexen Grössengebiet keine eindeutige Umkehrung. Wohl aber ergeben sich die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes, als symmetrische Functionen der oberen Grenzen μ, ν des vorliegenden unvollständigen Umkehrproblems (14), betrachtet für alle reellen Werthe der Variablen a_2 und gt, als eindeutige doppelt reell periodische Functionen von a_2 und gt.[1] Bei constantem a_2, wie im vorliegenden Falle, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes *einfach bedingt periodische Functionen* der Zeit. Die einzige Bedingung nämlich:

$$-m\int\limits_{\gamma}^{\mu_0}d\omega_2+n\int\limits_{\beta}^{\alpha}d\omega_2=0$$

[1] Vgl. *Über eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen*, Mathematische Annalen, Bd. 29, 1887.

macht sie periodisch mit der Periode $4T$, falls:

$$-m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_3 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_3 = gT$$

gesetzt wird. Solche einfach bedingt periodische Bewegungen sind auch, wie man sofort sieht, die in § 1 und § 2 betrachteten Bewegungen auf dem Ellipsoide λ_0.[1]

Beschränkt man endlich den unter Einfluss der Kräftefunction (9) sich bewegenden Punct auf die Krümmungscurve $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ des Ellipsoides λ_0, so entspricht seine Bewegung der Gleichung:

$$\int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = gt, \tag{15}$$

und seine Coordinaten x, y, z werden Umkehrfunctionen eines einzelnen hyperelliptischen Integrals 1. Gattung vom Geschlecht 3. Die Bewegung ist dann eine *unbedingt periodische.*[2]

Hiermit schliesst jene Reihe von Umkehrproblemen hyperelliptischer Integrale 1. Gattung vom Geschlecht 3, welche in den Formeln (13), (14) und (15) enthalten ist. Durchläuft man dieselbe von ihrem letzten Typus zu ihrem ersten, so ändert sich der Charakter der entsprechenden Bewegung in der Weise, dass die ursprüngliche *Periodicität* durch eine *bedingte Periodicität* ersetzt wird, die sich der Zahl der erforderlichen Bedingungen nach weiter und weiter von der unbedingten Periodicität entfernt.

Dorpat, im März 1887.

---

[1] Hierher gehört auch die von C. Neumann, *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticarum classem revocatur*, Regiomonti 1856, behandelte Bewegung und andere.

[2] Vgl. Weierstrass, *Über eine Gattung reell periodischer Functionen*, Berliner Monatsberichte, 1866. Hierher gehören eine ganze Reihe von Bewegungen; vgl. Russell, *On the occurence of the higher transcendents in certain mechanical problems*, The messenger of mathematics, new series, vol. 7—8; Greenhill, *On the motion of a top and allied problems in dynamics*, Quarterly journal of mathematics, vol. 15; und andere.

SUR LES SURFACES POSSÉDANT LES MÊMES PLANS DE SYMÉTRIE QUE L'UN DES POLYÈDRES RÉGULIERS[1]

PAR

L. LECORNU

À CAEN.

Première partie. Théorie générale.

1. Pour former l'équation générale des surfaces qui jouissent d'une symétrie déterminée, on peut employer une méthode synthétique dont voici le principe. Prenons un système quelconque de coordonnées ponctuelles, et soient α, β, γ les valeurs de ces coordonnées pour un point arbitrairement choisi. Imaginons que, par un moyen ou un autre, on soit parvenu à trouver trois fonctions L, M, N de α, β, γ, qui demeurent invariables lorsqu'on passe du point considéré à tout autre point déduit de celui-là d'après la symétrie considérée. Les surfaces $L =$ *Constante*, $M =$ *Constante*, $N =$ *Constante*, jouissent évidemment de cette symétrie, et il en est de même de toute surface, ou tout groupe de surfaces, représenté par l'équation $\varphi(L, M, N) = 0$, φ étant une fonction quelconque. Inversement, si α, β, γ peuvent s'exprimer en fonction de

[1] Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 27 Décembre 1886, a bien voulu décerner une mention honorable. Le début a été légèrement remanié, en vue de préciser la portée de la méthode.

L, M, N, l'équation $\varphi = 0$ comprend toutes les surfaces répondant à la question; car, d'après l'hypothèse même que nous faisons, n'importe quelle surface peut se représenter par l'équation $\varphi = 0$, et ceci s'applique en particulier aux surfaces cherchées. Mais en général, si la fonction φ est choisie au hasard, l'équation $\varphi = 0$ ne représente pas une surface unique; elle fournit un certain nombre de surfaces dont chacune, prise isolément, est dépourvue de la symétrie demandée, et qui, par leur réunion, composent un ou plusieurs *groupes* symétriques. Le caractère propre des surfaces symétriques consiste en ce que chacune d'elles remplace à elle seule un de ces groupes. Pour éclaircir ceci par un exemple simple, supposons qu'on cherche, dans un plan, les courbes symétriques par rapport à deux axes rectangulaires ox, oy. En prenant $x^4 + y^4 = 2L$, $x^4 - y^4 = 2M$, on a deux fonctions L et M qui ne sont pas altérées par le changement de signe des variables, et l'on est conduit à représenter les courbes cherchées par l'équation $\varphi(x^4 + y^4,\ x^4 - y^4) = 0$. Si l'on veut mettre sous cette forme la droite $y = mx$, on trouve

$$(x^4 + y^4)(1 - m^4) - (x^4 - y^4)(1 + m^4) = 0.$$

C'est un groupe de quatre droites, comprenant la droite considérée. S'il s'agit de la conique $Ax^2 + By^2 = 1$, l'équation $\varphi = 0$ devient:

$$(A^2x^4 - B^2y^4)^2 - 2A^2x^4 - 2B^2y^4 + 1 = 0.$$

Elle représente alors les quatre coniques $\pm Ax^2 \pm By^2 = 1$, parmi lesquelles figure la conique donnée, et dont chacune possède séparément la symétrie voulue.

Si les trois surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ ont un nombre de points communs exactement égal au minimum exigé par la symétrie, toute surface algébrique symétrique peut se représenter isolément par une équation $\varphi(L, M, N) = 0$, entière en L, M, N. Ce théorème fondamental s'établit de la manière suivante. Soient:

$$L = f_1(x, y, z) \tag{1}$$

$$M = f_2(x, y, z) \tag{2}$$

$$N = f_3(x, y, z) \tag{3}$$

les valeurs de L, M, N, en coordonnées cartésiennes, et soit:

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique symétrique. Nous supposons que f_1, f_2, f_3, F sont des fonctions entières. L'équation:

$$F(x, y, z) = h \tag{4}$$

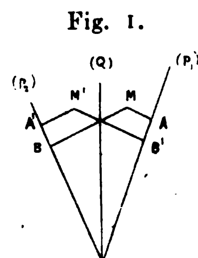
où h est une constante arbitraire, représente une surface également symétrique. Entre les équations (1), (2), (3) et (4), éliminons x, y, z. Nous parvenons à une équation entière $\Psi(L, M, N, h) = 0$, exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre équations admettent un système de solutions communes. Je dis que Ψ est du premier degré en h; en effet, par hypothèse, les équations (1), (2), (3) n'ont pas d'autres solutions communes que celles qui résultent de la symétrie, et toutes ces solutions donnent à h la même valeur; il n'y a donc qu'une seule valeur de h compatible avec les valeurs attribuées à L, M, N. Ceci posé l'équation $\Psi = 0$ peut s'écrire $h = \frac{\varphi(L, M, N)}{\omega(L, M, N)}$, φ et ω étant deux fonctions entières; et, par suite, l'équation $F = 0$ équivaut, au moins pour les points à distance finie, à $\varphi(L, M, N) = 0$, ce qui démontre la proposition.[1]

2. Nous sommes ainsi conduits à la recherche des fonctions L, M, N, que nous désignerons désormais sous le nom *d'éléments symétriques*. Comme tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier passent par un même point (qu'on peut appeler *l'origine* du système), le carré de la distance d'un point quelconque à celui-là fournit un premier élément, auquel nous donnerons le nom *d'élément sphérique* et que nous représenterons par L. En coordonnées rectangulaires, $L = x^2 + y^2 + z^2$. Nous entendrons par *sphère centrale* une sphère ayant son centre à l'origine. Pour former les autres éléments, considérons un système de plans P_1, P_2, ..., P_k passant par l'origine et formant une figure douée de la symétrie voulue. Supposons qu'aucun d'eux ne coïncide avec les plans de symétrie, et soit Q l'un de ces derniers. Les plans P sont groupés sy-

[1] Ce théorème ne figurait pas dans le mémoire présenté à l'Académie des sciences.

métriquement de part et d'autre du plan Q. Si P_1 et P_2 se correspondent de cette façon, les trois plans P_1, P_2, Q se coupent suivant une même droite qui dans la figure 1, est placée perpendiculairement au plan du tableau.

Fig. 1.



Soit M un point quelconque, soit M' son symétrique par rapport à Q. En abaissant les perpendiculaires MA, MB, $M'A'$, $M'B'$ sur P_1 et P_2, on a, en grandeur absolue:

$$MA \times MB = M'A' \times M'B'.$$

Cette relation est également vraie en signe: car, si M et M' sont de même côté par rapport à P_1, ils sont aussi de même côté par rapport à P_2 et alors MA est de même signe que $M'B'$; MB, de même signe que $M'A'$. Si au contraire M et M' sont de côtés différents par rapport à P_1, ils sont aussi de côtés différents par rapport à P_2 et, dans ce cas, MA et $M'B'$ sont de signes contraires, ainsi que MB et $M'A'$.

Si donc on forme le produit des distances du point M à tous les plans P, ce produit conserve même grandeur et même signe quand on remplace M par son symétrique relatif à Q. La même chose a lieu quel que soit le plan de symétrie Q. Par conséquent: *le produit des distances d'un point quelconque aux plans P est un élément symétrique.* Par suite, il suffira de chercher les deux systèmes les plus simples de plans P et de former les produits correspondants, pour avoir les deux nouveaux éléments M et N dont nous avons besoin.

Nous avons admis que le système des plans P ne comprenait pas de plans de symétrie. Cette restriction est nécessaire, car on voit sans peine que, si le plan de symétrie Q fait partie des plans P, le produit des distances à ces plans change de signe quand on substitue à un point son symétrique par rapport à Q. Mais on éviterait ce changement de signe en considérant le plan Q comme représentant deux plans P confondus, et introduisant par suite le carré de la distance au plan Q.

Il est aisé de fixer une limite inférieure de la somme des degrés m et n des éléments M et N, exprimés en coordonnées cartésiennes. En effet, ces deux éléments, joints à l'élément sphérique $L = x^2 + y^2 + z^2$,

doivent former un système indépendant, autrement dit, on ne doit pas avoir, identiquement:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} & \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut toujours s'assurer que ceci n'est pas une identité, et l'équation précédente représente alors la surface, lieu des points pour lesquels les trois surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ ont des plans tangents passant par une même droite. Le lieu est un cone de degré $m + n - 1$, ayant son sommet à l'origine, et comprenant tous les plans de symétrie, puisqu'en un point quelconque de l'un de ces plans les plans tangents aux trois surfaces passent évidemment par la normale au plan.

Il résulte de là que le nombre $m + n - 1$ est au moins égal à celui des plans de symétrie. S'il lui est exactement égal, le cone dont il s'agit se réduit aux plans de symétrie, et, en dehors de ces plans, les trois systèmes de surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ sont aptes à constituer un système de coordonnées.

Pour chaque type de symétrie, il y a deux éléments non sphériques, M et N, de degrés minima, nous les appellerons les *éléments simples*. On peut appeler éléments complexes les éléments symétriques qui ne sont ni sphériques, ni simples.

3. Une surface est dite *élémentaire* quand son équation dépend d'un seul élément, simple ou complexe. Cette équation est donc de la forme $M = Const.$, ..., et elle exprime que le produit des distances de chacun des points de la surface à K plans fixes concourants P_1, P_2, P_3, ..., P_k est constant. Une telle surface possède un certain nombre de propriétés, indépendantes de la disposition symétrique des K plans, et que nous nous bornerons à énoncer. Elle est asymptotique aux K plans. Pour construire sa normale en un point, il suffit d'abaisser de ce point les perpendiculaires sur les plans asymptotiques, et de les limiter à leur point de rencontre avec un plan mené par l'origine perpendiculairement au rayon vecteur du point considéré. La résultante géométrique des K

droites ainsi obtenues donne la direction de la normale. Le produit des distances interceptées, à partir d'un point de la surface, sur une droite de direction arbitraire, mais fixe, par les plans asymptotiques, a une valeur constante. On en conclut que tout point M de la surface est un point central pour le système de points déterminé par les plans asymptotiques sur une tangente quelconque de la surface au point M. On en conclut aussi que les directions asymptotiques sont imaginaires, et par suite que les deux courbures d'une surface élémentaire sont toujours de même sens. Ceci reste vrai lors même que les plans P ne sont pas concourants, par exemple lorsque ce sont les faces d'un polyèdre régulier.

La transformée d'une surface élémentaire par polaires réciproques, relativement à une sphère ayant son centre à l'origine, peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan qui intercepte sur K droites fixes concourantes (les normales aux plans asymptotiques) à partir de leur point de rencontre, K longueurs dont le produit soit constant. Chaque plan tangent à la surface réciproque la touche au centre de gravité du système de points déterminé par ses intersections avec les K droites fixes. Les directions principales sont les axes d'inertie principaux de ce même système. La somme des rayons de courbure principaux varie en raison inverse de la distance du plan tangent à l'origine, et en raison directe du moment d'inertie du système des points d'intersection, par rapport à la normale.

4. Les courbes résultant de l'intersection des surfaces élémentaires symétriques avec les sphères centrales présentent une importance particulière; nous leur donnerons le nom de *sphérosymétriques.* Les sphérosymétriques provenant des surfaces élémentaires d'une même famille, et placées sur un même cone central, sont évidemment homothétiques; on peut aussi les déduire les unes des autres au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Dans la transformation par polaires réciproques relativement à une sphère centrale les points d'une sphérosymétrique ont pour correspondants les plans tangents à une sphère le long d'une sphérosymétrique homothétique à la première. Ces plans enveloppent une développable symétrique, circonscrite à la fois à une sphère et à la réciproque de la surface élémentaire qui contient la sphérosymétrique. D'après ce qui a été dit à l'article précédent, la ligne de contact de la développable avec la surface réciproque est une courbe le long de laquelle la somme des rayons de courbure principaux de la

développable varie proportionnellement au moment d'inertie, par rapport à la normale, du système de points formé par les intersections du plan tangent avec les normales à l'origine aux plans asymptotiques. Les lignes de courbure de la développable sont sphériques, et, comme elles résultent de l'intersection de deux surfaces (la développable et la sphère) douées de la même symétrie, elles partagent évidemment cette symétrie. L'arête de rebroussement est, d'après un théorème bien connu, ligne géodésique d'un cone central; cette arête, et le cone lui-même, jouissent aussi de la symétrie considérée.

Si n est le degré de la surface élémentaire, les sphérosymétriques correspondantes sont du degré $2n$. D'après les formules connues[1] la développable formée par les plans tangents à la sphère le long d'une sphérosymétrique est caractérisée par les données suivantes:

Classe (nombre de plans tangents passant par un point donné) $\nu = 2n$

Rang (degré de la développable) . . . . $r = 2n^2$

Nombre de plans stationnaires . . . . $\alpha = 0$

et la connaissance de ces données suffit pour déterminer tous les autres éléments de la surface. Sans insister sur ces détails, voyons seulement quelle est l'influence de la symétrie supposée. Les génératrices de la développable rencontrent à angle droit la sphérosymétrique le long de laquelle elles touchent une même sphère. D'ailleurs, chaque plan de symétrie coupe orthogonalement cette sphérosymétrique en $2n$ points, situés sur une circonférence. Par chacun d'eux passe une génératrice située dans le plan de symétrie, et tangente à la circonférence. On a ainsi $2n$ droites d'intersection du plan de symétrie avec la développable. La section, étant du degré $2n^2$ comprend, en dehors de ces $2n$ droites, une courbe d'ordre $2n(n-1)$. Le long de cette courbe, la développable ne peut rencontrer normalement le plan de symétrie, sans quoi elle se réduirait à un cylindre. Nous avons donc en réalité affaire à une ligne double de la développable: son degré est seulement $n(n-1)$. Elle possède un point de rebroussement en chacun des points où elle rencontre l'arête de rebroussement. Il est facile d'en calculer le nombre. En effet le degré m de l'arête est égal à $3(r-\nu)$ ou à $6n(n-1)$. Chacune des $2n$ génératrices situées dans le plan de symétrie est tangente à l'arête

---

[1] Voir notamment le *Traité de géométrie analytique* de SALMON.

de rebroussement; par raison de symétrie, elle touche évidemment celle-ci en un point de rebroussement. L'arête de rebroussement possède ainsi $2n$ points de rebroussement dans chaque plan de symétrie. Chacun de ces points correspond à trois points de rencontre de l'arête avec le plan de symétrie. Il reste donc dans le même plan, $6n(n-1)-6n=6n(n-2)$ points de rencontre, qui sont situés sur la ligne double et se réduisent ainsi à $3n(n-2)$ points distincts; tel est le nombre des points de rebroussement de la section, déterminée par le plan de symétrie. Par exemple, pour $n=3$, la section est une sextique ayant 9 points de rebroussement.

Considérons maintenant un plan sécant quelconque P. Il coupe la surface développable qui nous occupe suivant une courbe d'ordre $2n^2$. Sa trace sur un plan de symétrie rencontre la ligne double contenue dans celui-ci en $n(n-1)$ points qui sont des points doubles de la section faite par ce plan P. Si p est le nombre des plans de symétrie, on connaît ainsi $pn(n-1)$ points doubles. Mais, d'après les formules générales, le nombre des points doubles doit être égal à $\frac{1}{2}r(r-2)-\frac{4}{3}m$ ou bien $2n^2(n^2-1)-8n(n-1)$. Si donc p est inférieur à

$$\frac{2n^2(n^2-1)-8n(n-1)}{n(n-1)}$$

c'est à dire à $2(n^2+n-4)$, la surface développable possède des lignes doubles en dehors des plans de symétrie; on s'assure facilement que tel est toujours le cas. Outre les $2n(n^3-5n+4)$ points doubles qui viennent d'être indiqués, la section possède $6n(n-1)$ points de rebroussement situés sur l'arête de rebroussement.

On peut également étudier la surface développable formée par les tangentes à une sphérosymétrique. Son degré r est le même que celui de la réciproque de cette courbe, c'est à dire $2n^2$. L'arête de rebroussement est du degré $m=2n$, et elle n'a généralement pas de points doubles. Ici, les plans de symétrie ne contiennent pas de génératrices, et rencontrent la surface suivant des courbes d'ordre n^2. Le nombre des points doubles d'une section quelconque est $4n^2(n^2-2)$. pn^2 de ces points sont, comme précédemment, dans les plans de symétrie, et, comme p se trouve toujours inférieur à $4(n^2-2)$, il y a nécessairement des lignes doubles en dehors des plans de symétrie.

5. Nous entendons par *surfaces binaires* celles qui dépendent de deux éléments seulement, y compris l'élément sphérique. Leur équation est donc de la forme

$$(1) \qquad F(L, M) = 0$$

L étant l'élément sphérique $x^2 + y^2 + z^2$, et M, l'élément d'ordre m, égal au produit des distances du point x, y, z aux plans $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Nous admettrons que ces plans sont distincts, et nous les appellerons *plans directeurs.* Toute surface élémentaire $M = Const.$ coupe la surface binaire considérée suivant une ou plusieurs courbes sphériques, qui sont des sphérosymétriques d'ordre $2m$. En écrivant que l'équation (1), considérée comme équation en M, a une racine double, on obtient certaines valeurs de L, déterminant les sphérosymétriques le long de chacune desquelles la surface binaire est touchée par une surface élémentaire. En faisant $M = 0$, on obtient une équation en L déterminant les rayons de diverses sphères qui coupent chacune la surface suivant m cercles situés dans les plans directeurs; nous les appellerons les *sphères directrices.* Chacune d'elles est touchée par la surface aux $m(m-1)$ points où elle est rencontrée par les arêtes d'intersection des plans directeurs pris deux à deux. S'il y a p sphères directrices, chaque plan directeur coupe la surface suivant p cercles, et la surface possède ainsi pm cercles.

L'équation homogène $M^2 - AL^m = 0$, où A est une constante, représente un cone central d'ordre $2m$. Ce cone rencontre la surface suivant des sphérosymétriques situées sur les sphères déterminées par l'équation

$$(2) \qquad F(L, L^{\frac{m}{2}}\sqrt{A}) = 0.$$

Si l'on choisit A de telle façon que cette équation en L ait une racine double λ, le cone central touche la surface le long d'une sphérosymétrique située sur la sphère $L = \lambda$. Cette sphère coupe orthogonalement la surface binaire, qui admet par suite comme ligne de courbure la sphérosymétrique d'intersection.

Supposons en particulier que la surface soit algébrique, et que

l'élément M entre au premier degré dans son équation, que nous écrirons alors:

$$(3) \qquad M = \frac{\varphi(L)}{\psi(L)},$$

φ et ψ étant des polynômes de degrés p et q, sans racines communes. Les p sphères directrices ont pour rayons les racines carrées des racines de $\varphi(L) = 0$. Les q sphères $\psi(L) = 0$ ne peuvent rencontrer la surface qu'à l'infini, et n'ont avec celle-ci aucun point réel commun. Si donc elles sont réelles, elles partagent l'espace en régions telles que la surface ne peut passer réellement de l'une dans l'autre. L'équation (2) prend ici la forme:

$$\sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}} \psi(L) - \varphi(L) = 0.$$

Pour une racine double L, on a:

$$\frac{m}{2}\sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}-1} \psi(L) + \sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}} \psi'(L) - \varphi'(L) = 0,$$

d'où, en éliminant A:

$$(4) \qquad \frac{m}{2}\varphi(L)\psi(L) + L\psi'(L)\varphi(L) - L\varphi'(L)\psi(L) = 0,$$

équation qui est généralement du degré $p + q$ en L. Par conséquent il y a $p + q$ sphères centrales orthogonales à la surface binaire représentée par l'équation (3).

Un cas très important est celui où $\psi(L)$ se réduit à une constante. On a alors $M = \varphi(L)$, et la surface est le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à p sphères concentriques est proportionnel au produit des distances à m plans concourant au centre de ces sphères. Pour chaque type de symétrie, la surface générale du degré le plus bas possible est représentée par une équation de cette nature. Car, si M est l'élément non sphérique le plus simple relatif à la symétrie considérée, en prenant pour $\varphi(L)$ un polynôme de degré égal au plus grand entier contenu dans $\frac{m}{2}$ on obtient évidemment la surface de degré minimum. Pour étudier ce cas, il suffit de supposer $q = 0$, et alors on voit que le

nombre des sphères orthogonales est précisément égal au nombre des sphères directrices. De plus, l'équation (4) se réduit à:

$$m\varphi(L) - 2L\varphi'(L) = 0. \tag{5}$$

Cette équation est en général du degré p, et ses racines sont entièrement déterminées par celles de $\varphi(L)$. On voit donc que:

Les surfaces $M = C\varphi(L)$, où M est un élément symétrique d'ordre m, C une constante arbitraire et $\varphi(L)$ un polynôme de degré p en L, forment un faisceau contenant mp cercles fixes, situés à l'intersection des m plans directeurs avec les p sphères directrices; ce faisceau coupe orthogonalement p sphères fixes, concentriques aux premières.

Il y a cependant une exception lorsque le degré de l'équation (5) se trouve abaissé au dessous de p. Cette circonstance se produit si $m = 2p$, c'est-à-dire si le nombre des plans directeurs est égal à deux fois celui des sphères directrices. Alors les sphères orthogonales sont au nombre de $p - 1$ seulement; la dernière est rejetée à l'infini.

Quand il y a deux sphères directrices confondues en une seule, $\varphi(L) = 0$ et $\varphi'(L) = 0$ ont une racine commune, qui vérifie l'équation (5). La sphère directrice est donc dans ce cas orthogonale à la surface, et, comme elle doit généralement toucher la surface en $m(m - 1)$ points, il en résulte que la surface possède, sur cette sphère, $m(m - 1)$ points où le plan tangent est indéterminé: c'est-à-dire $m(m - 1)$ points nodaux.

6. Toute surface symétrique dont l'équation peut se mettre sous la forme:

$$f = \varphi(M, N, L) + \psi(L) = 0,$$

(φ désignant une fonction homogène des trois éléments symétriques, et ψ, une fonction de l'élément sphérique dont le degré par rapport aux coordonnées soit inférieur à celui de φ), jouit également de la propriété de rencontrer orthogonalement un certain nombre de sphères centrales. En effet, pour exprimer qu'un plan tangent:

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0$$

représenté par une équation rendue homogène, passe par l'origine, il suffit

de poser la condition $f_i' = 0$. Or cette condition, d'après l'hypothèse admise, dépend uniquement de l'élément sphérique; elle détermine donc les rayons d'une ou de plusieurs sphères orthogonales à la surface symétrique. On voit en outre que, si la surface a des points nodaux, ses points, devant vérifier la condition $f_i' = 0$, appartiennent à l'une des sphères orthogonales, et par conséquent à l'une des lignes de courbure sphériques.

7. Lorsqu'une surface binaire contient une droite réelle, celle-ci coupe les m plans directeurs en m points réels, qui se trouvent nécessairement sur les sphères directrices. Il faut donc que $\frac{m}{2}$ sphères directrices au moins soient réelles. Remarquons de plus que le plan mené par la droite et par l'origine coupe ces sphères suivant des cercles concentriques, et les plans directeurs suivant des rayons aboutissant aux points de rencontre de la droite avec les cercles. Les traces des plans directeurs sont donc symétriquement disposées de part et d'autre du rayon perpendiculaire à la droite. Cela n'est en général possible que si ce rayon est la trace d'un plan de symétrie perpendiculaire à la droite. Donc *les droites réelles de la surface sont perpendiculaires aux plans de symétrie.* Ce raisonnement n'est nullement applicable aux droites imaginaires, pour lesquelles les considérations de symétrie n'apprennent plus rien. On peut s'en convaincre en remarquant que, dans un plan, les deux droites $x^2 + y^2 = 0$ forment un système doué d'une infinité d'axes de symétrie, ce qui serait absurde pour des droites réelles.

Réciproquement, si on considère une droite réelle perpendiculaire à un plan de symétrie, et une surface binaire d'ordre K, dont l'équation $F(L, M) = 0$ renferme un nombre n de coefficients arbitraires supérieur à $\frac{K}{2}$, on peut déterminer ces coefficients de façon que la surface passe par n points de la droite, placés d'un même côté du plan de symétrie. La surface passera alors par $2n$ points de la droite, et contiendra par suite cette dernière ainsi que toutes celles qui lui correspondent par symétrie.

8. Dès qu'on est en possession d'une surface pourvue des plans de symétrie d'un polyèdre régulier, on peut imaginer une infinité de transformations qui n'altèrent pas sa symétrie. On peut, par exemple, employer la transformation par rayons vecteurs réciproques ou par polaires

réciproques relativement à une sphère centrale. On peut aussi considérer le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à la surface et à une sphère centrale est constant; on obtient ainsi une surface nouvelle douée évidemment de la même symétrie que la première. En faisant varier la somme ou la différence considérée, on réalise une double famille de surfaces symétriques orthogonales.

9. Les polyèdres réguliers convexes sont au nombre de cinq; mais, si l'on tient compte seulement de leur genre de symétrie, ils se ramènent à trois types:

1°. Symétrie tétraédrique (le tétraèdre),

2°. » cuboctaédrique (l'hexaèdre et l'octaèdre),

3°. » icosidodécaédrique [1] (le dodécaèdre et l'icosaèdre).

Le premier type dérive du second par disparition d'un centre de symétrie (hémiédrie). Les polyèdres réguliers non convexes appartiennent tous au troisième type.

Nous étudierons successivement les surfaces qui se rapportent aux trois types, en supposant essentiellement que les coefficients de leurs équations sont réels.

Deuxième partie. Surfaces du type tétraédrique.

9. Le type tétraédrique est caractérisé par six plans de symétrie perpendiculaires deux à deux; ce sont les plans menés par les six arêtes du tétraèdre et par le centre de la sphère circonscrite. Leur existence entraîne celle de quatre axes ternaires (les quatre hauteurs) et de trois axes binaires, rectangulaires deux à deux, joignant les milieux des arêtes opposées. Il n'y a pas de centre de symétrie.

Prenons comme axes de coordonnées les trois axes binaires, et, pour fixer les idées, supposons l'axe des z vertical. Les trois plans de coordonnées, que nous appellerons *plans principaux*, jouissent alors de la symétrie du système, et, comme ils sont distincts des plans de symétrie, le

---

[1] Ces dénominations sont empruntées aux recherches de M. JORDAN sur les polyèdres (Journal de CRELLE, t. 68, 1868).

produit $M = xyz$ des distances d'un point quelconque à ces trois plans nous donne un élément symétrique. Le produit N des distances d'un point aux quatre plans menés par l'origine perpendiculairement aux axes ternaires fournit le second élément dont nous avons besoin. Ces quatre plans ont pour équations: $x \pm y \pm z = 0$. On peut donc, en négligeant un facteur constant, poser:

$$N = -(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2$$

et l'équation générale des surfaces cherchées se trouve mise sous la forme:

$$\varphi(x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2,\ xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

En vertu de l'identité:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2),$$

la même équation peut s'écrire:

$$\psi(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2,\ xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

ou

$$\chi(x^4 + y^4 + z^4,\ xyz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Les degrés des éléments sont $m = 3$, $n = 4$, d'où $m + n - 1 = 6$, ce qui est précisément le nombre des plans de symétrie. Ce résultat concorde avec ce qui a été dit au n° 2. D'ailleurs, il est évident que les valeurs des trois quantités:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u$$
$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = v$$
$$xyz = w$$

peuvent servir à fixer la position d'un point dans l'espace avec l'indétermination nécessitée par la symétrie tétraédrique; si l'on forme en effet l'équation en S

$$S^3 - uS^2 + vS - w^2 = 0,$$

les trois racines, rangées arbitrairement, donnent les valeurs de x^2, y^2, z^2, soit en tout six solutions. Si l'on choisit en outre les signes de x, y, z de manière à vérifier l'équation $xyz = w$, on parvient à un groupe de 24 points répondant à la symétrie tétraédrique.

10. La surface tétraédrique la plus simple est, après la sphère, la surface cubique qui a pour équation générale:

$$xyz + A(x^2 + y^2 + z^2) + B = 0.$$

Par chaque point de cette surface passe une sphérosymétrique du 6ème ordre, et une seule. D'ailleurs, les deux plans, réels ou imaginaires menés parallèlement à xoy, à une distance z de l'origine déterminée par la condition $Az^2 + B = 0$, coupent chacun la surface suivant deux droites représentées par l'équation

$$A(x^2 + y^2) + xy\sqrt{-\frac{B}{A}} = 0$$

Ces deux droites rencontrent l'axe des z, et la connaissance d'une seule d'entre elles suffit pour déterminer complétement la surface. On peut donc dire que:

La surface cubique symétrique est engendrée par une sphérosymétrique du 6ème ordre assujettie à s'appuyer constamment sur une droite, réelle ou imaginaire, qui rencontre orthogonalement l'un des axes binaires.

Une sphérosymétrique du 6ème ordre a pour équations:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Const.,$$
$$xyz = Const.$$

On tire de là:

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$$

Cette courbe rencontre orthogonalement une surface définie par l'équation différentielle:

$$xdx(y^2 - z^2) + ydy(z^2 - x^2) + zdz(x^2 - y^2) = 0$$

dont l'intégrale peut s'écrire:

$$(1) \qquad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$$

α, β, γ étant trois constantes dont la somme est nulle. On déduit de là que:

Les sphérosymétriques du $6^{\text{ème}}$ *ordre sont les trajectoires orthogonales des cones du second ordre passant par les quatre axes ternaires; par conséquent, celles qui sont tracées sur une même sphère sont les trajectoires orthogonales de coniques sphériques passant par quatre points fixes d'un même hemisphère.*

On sait [1] que les coniques sphériques circonscrites à un quadrilatère rectiligne imaginaire de la sphère sont des courbes telles que, pour chacune d'elles, il y a un rapport constant entre les distances de ses points à deux diamètres fixes D, Δ, et que cette famille de courbes a pour trajectoires orthogonales les courbes, lieux des points M pour lesquels les grands cercles MD, $M\Delta$ font un angle constant. Ces trajectoires orthogonales sont des cycliques, transformées par rayons vecteurs réciproques d'ellipses de Cassini. Si, dans le cas des sphérosymétriques qui nous occupent, on remplace γ par $-\gamma$, l'on a $\gamma = \alpha + \beta$, et la relation (1) devient:

$$\alpha(x^2 + z^2) + \beta(y^2 + z^2) = 0.$$

Elle exprime alors que le rapport des distances de la conique sphérique aux deux axes $0x$, $0y$ est constant, et l'on rentre ainsi dans le cas précédent. On parvient au même résultat en remplaçant z par iz, sans changer γ; de là un rapprochement intéressant entre les sphérosymétriques et une classe de cycliques sphériques.

La surface cubique contenant en chacun de ses points une sphérosymétrique, on voit que:

La surface cubique symétrique rencontre orthogonalement tous les cones du second ordre circonscrits aux axes ternaires.

Cette propriété subsiste pour les surfaces binaires d'ordre supérieur dont l'équation dépend des deux premiers éléments, $x^2 + y^2 + z^2$ et xyz. Le troisième élément convient, comme on le verra, aux surfaces du type cuboctaédrique aussi bien qu'à celles du type tétraédrique. On peut donc dire que son absence caractérise une surface appartenant purement au type tétraédrique, et énoncer alors ce théorème:

---

[1] Voir l'ouvrage: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Mém. de la société des sciences de Bordeaux, 1870—1873) par M. Darboux.

Toute surface appartenant purement au type tétraédrique est trajectoire orthogonale des cones du second ordre circonscrits aux axes ternaires.

On achève de déterminer la surface en se donnant une courbe, par exemple une section horizontale. La surface est cubique, comme on l'a vu précédemment, si elle contient une droite rencontrant à angle droit l'un des axes binaires.

11. Les équations différentielles d'une sphérosymétrique peuvent s'écrire:

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0.$$

La tangente en un point est donc perpendiculaire à la fois au rayon vecteur issu de l'origine, et à la droite, lieu des points dont les coordonnées sont proportionnelles à $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. Cette droite peut être appelée *l'inverse* de celle qui coïncide avec le rayon vecteur. En outre, les sphérosymétriques rencontrant la droite inverse ont également, à leurs points de rencontre, des tangentes perpendiculaires au plan des deux droites. Tout plan mené par l'origine contient, comme il est aisé de le voir, deux droites inverses l'une de l'autre et deux seulement. Chacune d'elles rencontre une surface cubique symétrique en trois points, et, en chacun de ces points, le plan tangent est normal au plan considéré. Par conséquent:

Tout plan mené par l'origine est normal à une cubique symétrique en six points, situés sur deux droites inverses.

12. La sphère, réelle ou imaginaire, dont le rayon a vérifie la relation $Aa^2 + B = 0$, coupe la surface suivant trois grands cercles situés dans les plans principaux. On peut distinguer deux genres de surfaces cubiques symétriques, suivant que cette sphère est réelle ou imaginaire. Comme cas intermédiaire il y a celui d'une sphère directrice évanouissante; la surface possède alors un point isotrope à l'origine. En mettant en évidence le rayon de la sphère directrice, nous écrirons l'équation sous la forme:

$$2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0.$$

Comme on est maître de l'orientation des axes, on peut toujours supposer que b est positif.

13. L'équation précédente dépendant seulement de deux constantes, il est évident que toute équation représentant une surface cubique douée de la même symétrie que le tétraèdre régulier, et contenant deux constantes arbitraires, doit conduire à des résultats identiques. Chacune de ces formes d'équation correspond à un mode de génération des surfaces cubiques symétriques. Par exemple, si on appelle t, u, v, w les distances d'un point aux quatre faces d'un tétraèdre régulier de hauteur h, comptées toutes positivement lorsque le point est à l'intérieur du tétraèdre, et si l'on écrit, en appelant m une constante:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = m^3$$

avec la condition évidente:

$$t + u + v + w = h,$$

la surface ainsi représentée en coordonnées tétraédriques ne peut différer de la cubique symétrique; car son équation dépend des deux constantes m et h. Un calcul facile conduit en effet de l'équation cartésienne:

$$2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0$$

à l'équation tétraédrique:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = \frac{4b}{\sqrt{3}}\left(a^2 + \frac{1}{3}b^2\right),$$

pourvu que la hauteur h du tétraèdre soit prise égale à $\frac{4b}{\sqrt{3}}$.

Il résulte de là que:

La cubique symétrique est le lieu des points tels que la somme des cubes de leurs distances aux quatre faces d'un tétraèdre soit constante.

Le tétraèdre ainsi déterminé mérite spécialement le nom de *tétraèdre de référence.* Il y a lieu d'observer que la hauteur h du tétraèdre, et par conséquent toutes ses dimensions, sont indépendantes du rayon a de la sphère directrice. On peut donc dire qu'une surface cubique symétrique est déterminée par les dimensions de sa sphère directrice et de son tétraèdre de référence. Le paramètre b est égal à la distance des arêtes

du tétraèdre au centre de la sphère, ou, si l'on veut, à la moitié de la plus courte distance de deux arêtes opposées.

On doit à SYLVESTER la forme canonique de l'équation générale des surfaces du 3ème degré:

$$\alpha t^3 + \beta u^3 + \gamma v^3 + \delta w^3 + \varepsilon \omega^3 = 0$$

équation dans laquelle t, u, v, w, ω sont les distances d'un point de la surface à cinq plans, et α, β, γ, δ, ε sont des coefficients arbitraires. SYLVESTER a en outre annoncé, et CLEBSCH a démontré que, pour une surface donnée, la réduction ne peut se faire que d'une seule manière. Ce qui précède montre que, dans le cas des cubiques symétriques, le pentaèdre de référence se compose d'un tétraèdre régulier et du plan de l'infini.

14. On peut toujours, en partant de la forme réduite de SYLVESTER, supposer que les cinq variables satisfont à la relation:

$$t + u + v + w + \omega = 0.$$

Il suffit pour cela de substituer à chacune d'elles son produit par un facteur constant, convenablement choisi. L'équation du hessien est alors (voir SALMON, *Géométrie à trois dimensions*):

$$\frac{1}{\alpha t} + \frac{1}{\beta u} + \frac{1}{\gamma v} + \frac{1}{\delta w} + \frac{1}{\varepsilon \omega} = 0.$$

Dans le cas de la surface symétrique, la relation identique est: $t + u + v + w - h = 0$. Il suffit donc de prendre $h = -\omega$ pour rentrer dans le cas précédent, et l'équation du hessien est par conséquence:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{\varepsilon h}.$$

C'est une surface symétrique du 4ème degré. En vertu d'un théorème de SYLVESTER, les 10 sommets du pentaèdre de référence sont des points doubles du hessien, et ses dix arêtes sont situées sur la même surface. Donc, dans le cas actuel:

Le hessien de la surface cubique symétrique est une surface du 4ème degré circonscrite au tétraèdre de référence et coupant en outre chacune des

faces suivant une droite à l'infini. Les quatre sommets du tétraèdre, et les points à l'infini sur chaque arête, sont des points doubles de la même surface.

Si l'on pose:

$$Tt = Uu = Vv = Ww = \lambda,$$

T, U, V, W étant de nouvelles variables, et λ, une constante, l'équation du hessien prend la forme:

$$T + U + V + W = \frac{\lambda}{\varepsilon h}$$

avec la condition:

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = \frac{h}{\lambda}.$$

En prenant $\lambda = \varepsilon h^2$, on retrouve les équations entre t, u, v, w qui caractérisent le hessien. Par conséquent, *les points du hessien se correspondent deux par deux de telle façon que leurs coordonnées tétraédriques soient inversement proportionnelles.*

15. Lorsque la sphère directrice est imaginaire, et que le carré de son rayon est égal à $-\frac{1}{3}b^2$, l'équation tétraédrique se réduit à:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0.$$

Elle rentre alors dans le type général:

$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{u}{\beta}\right)^m + \left(\frac{v}{\gamma}\right)^m + \left(\frac{w}{\delta}\right)^m = 0$$

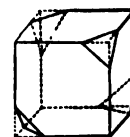
où m est un nombre rationnel et α, β, γ, δ sont des coefficients arbitraires, le tétraèdre de référence ayant d'ailleurs une forme quelconque. C'est l'équation générale des surfaces que M. de la Gournerie a étudiées sous la dénomination de »surfaces tétraédrales symétriques simples» (Paris, 1867). Quel que soit m, il est évident qu'en supposant les coefficients égaux et prenant pour tétraèdre de référence un tétraèdre régulier on obtient des surfaces possédant la même symétrie que ce dernier. Mais ce ne sont pas, au point de vue de la symétrie, les surfaces les plus générales de leur degré. Pour $m = \frac{1}{2}$, on a la surface de Steiner; pour $m = -1$, on a la surface réciproque de celle de Steiner. Cette der-

nière est une forme limite de la surface hessienne, déjà envisagée; il suffit de supposer que le coefficient ε augmente indéfiniment, et par conséquent que la cubique symétrique s'éloigne tout entière à l'infini, par suite de l'agrandissement de sa sphère directrice.

16. Nous devons maintenant déterminer, dans le cas de la surface cubique symétrique, la position des 27 droites qui existent, comme l'on sait, sur toute surface cubique, et faire connaître leurs conditions de réalité. D'abord, la surface possède à l'infini trois droites réelles, situées dans les plans principaux. Toute autre droite, D, de la surface coupe le plan de l'infini en un point qui appartient à la section de la surface par ce plan, et par conséquent à un plan principal. Supposons-la parallèle au plan xoy. Si l'on mène par la droite D un plan parallèle à xoy, il coupe la surface suivant une courbe du 3ème degré comprenant la droite D et une droite à l'infini. Le reste de l'intersection est donc formé d'une autre droite D', à distance finie, et tout revient à chercher, parmi les sections parallèles aux plans principaux, celles qui se décomposent en deux droites.

Ceci posé, une discussion bien facile montre qu'il existe deux cubes, admettant l'un et l'autre les plans principaux pour plans de symétrie, dont les faces coupent chacune la surface suivant deux droites. Le premier est circonscrit au tétraèdre de référence; c'est à dire que son arête est égale à b, et qu'il est toujours réel. Chacune de ses faces rencontre la surface suivant deux droites parallèles entre elles et à une arête du tétraèdre (diagonale d'une face du cube). Ces droites ne sont réelles que si a^2 est positif et supérieur à b^2, par conséquent si la sphère directrice rencontre réellement les arêtes du tétraèdre. Les droites se groupent trois par trois autour de quatre sommets du cube, de manière à constituer quatre facettes parallèles aux faces du tétraèdre. Dans le langage cristallographique, on dirait que ces facettes sont obtenues par une modification hemiédrique du cube, due à des plans tangents sur quatre sommets (Fig. 2). Nous appellerons *droites du premier système* les douze droites ainsi obtenues. Le second cube est circonscrit à la sphère directrice. Chacune de ses faces coupe la surface suivant deux droites passant par le point de contact avec la sphère. De là douze droites, que nous appellerons les *droites du second système,* et qui sont réelles ou imaginaires en même

Fig. 2.



temps que celles du premier. On peut, de deux manières différentes, les grouper en trois quadrilatères gauches. Si elles sont réelles, le cube qui les contient est extérieur à celui qui contient les douze premières droites. Si elles sont imaginaires, leur cube est également imaginaire, et il est impossible de faire passer par l'une d'elles un plan réel. Si l'on considère quatre droites du premier système non situées dans le même plan, il existe deux droites qui rencontrent les quatre droites à la fois, et qui par conséquent appartiennent à la surface cubique; ce sont nécessairement des droites du second système.

En résumé, les 27 droites de la surface sont: les 3 droites de l'infini, les 12 droites du premier système, les 12 droites du second. Les droites de l'infini sont toujours réelles; les autres sont, toutes ensemble, réelles ou imaginaires. On sait que chaque droite d'une cubique est rencontrée par dix autres. Ici, en appelant couple de droites deux droites symétriques par rapport à l'un des plans de symétrie, on trouve qu'une droite du premier système est rencontrée par

1 droite à l'infini	1
1 droite parallèle, du 1er système	1
2 couples de droites du 1er système	4
2 » du 2e »	4
	10.

Une droite du second système est rencontrée par:

1 droite à l'infini.	1
4 droites du 1er système	4
1 droite du 2e système (au centre d'une face du cube).	1
4 droites » (sur les arêtes du cube) . . .	4
	10.

Enfin, une droite à l'infini est rencontrée par:

2 droites à l'infini	2
2 couples de droites du 1er système	4
2 » » du 2e »	4
	10.

On sait encore qu'une surface cubique a 45 plans tritangents, contenant chacun trois droites de la surface. Ici, nous avons:

	Le plan de l'infini	1
3 fois:	1 droite de l'infini et 2 couples de droites du 1er système	6
3 fois:	1 droite de l'infini et 2 couples de droites du 2e système	6
2 fois:	4 plans, contenant chacun 3 droites du 1er système . .	8
2 fois:	12 plans, contenant chacun 1 droite du 1er système et 2 du 2ème . .	24
		45.

Le cube qui contient les droites du 1er système étant toujours réel, ainsi que le plan de l'infini, il y a au moins 7 plans tritangents réels.

Observons encore qu'il y a 6 plans tritangents contenant chacun 3 droites concourantes (savoir, une droite à l'infini et deux droites concourantes). C'est une particularité qui se conserverait dans toute transformation homographique de la surface, et, comme en général une surface du 3ème ordre n'a pas 3 droites concourantes et situées dans un même plan, il est généralement impossible de ramener homographiquement une surface cubique à la forme symétrique. Du reste, si l'on se donne les plans principaux d'une surface cubique symétrique, l'équation de celle-ci ne renferme que deux coefficients. La transformation homographique en introduit 15, ce qui fait en tout 17, tandis qu'il en faudrait 19 pour parvenir à l'équation la plus générale.

17. Toute section de la cubique symétrique par un plan réel possède à l'infini 3 points réels. Si donc elle est indécomposable, c'est une *hyperbole redondante* de Newton. Il n'y a d'exception que si deux points à l'infini sont confondus, et l'on a alors une *hyperbole parabolique.* Ce dernier cas se présente lorsque le plan de la section est parallèle à l'un des axes binaires.

Par chaque point de la surface passent 27 coniques, situées dans les plans menés par les 27 droites. La section complète déterminée par l'un de ces plans a 3 points réels à l'infini, dont l'un sur la droite. La conique a donc à l'infini deux points réels, et appartient au genre

hyperbole. Il n'y a d'exception que dans deux cas: 1°. Si les points à l'infini sont tous sur la droite, qui est par suite l'une des droites de l'infini; alors le plan sécant est parallèle à un plan principal, et la conique est d'un genre quelconque. 2°. Si les deux points à l'infini de la conique sont confondus; l'hyperbole dégénère alors en parabole. Il faut et il suffit pour cela que le plan sécant rencontre deux droites de l'infini au même point, autrement dit qu'il passe par un sommet du triangle de l'infini, et, par conséquent, qu'il soit parallèle à une direction binaire. Comme il contient déjà une droite de la surface, c'est à dire une parallèle à l'un des plans principaux, et comme les directions binaires sont parallèles ou perpendiculaires aux plans principaux, le plan sécant est lui-même parallèle à un plan principal, ce qui donne deux droites, ou perpendiculaire, ce qui donne une parabole proprement dite. Il y a ainsi 24 paraboles, correspondant aux 24 droites à distance finie.

En discutant la forme des sections parallèles aux plans principaux, on s'assure sans peine qu'il y a au plus trois cercles réels sur la surface, à savoir ceux qui sont situés dans les plans principaux. Ces cercles ne sont réels que si la sphère directrice est elle-même réelle. Il existe en outre des cercles toujours imaginaires, au sujet desquels nous nous bornerons à l'énoncé suivant:

Chacune des douze droites du premier système est associée à deux cercles imaginaires, qu'elle rencontre aux mêmes points.

18. Les sections de la surface faites par des sphères centrales sont des sphérosymétriques du 6ème ordre, dont l'une, celle qui est déterminée par la sphère directrice, se décompose en trois cercles rectangulaires. Si la sphérosymétrique rencontre les quatre axes ternaires, elle se réduit évidemment aux 8 points situés sur ces 4 axes, car elle est, comme on l'a montré, une trajectoire orthogonale des coniques sphériques passant par ces 8 points; c'est une sphérosymétrique évanouissante. Le rayon ρ de la sphère correspondante s'obtient en faisant $x = y = z = \pm \frac{\rho}{\sqrt{3}}$ dans l'équation de la surface, ce qui donne pour x:

$$2x^3 - b(3x^2 - a^2) = 0.$$

L'équation dérivée est $x(x - b) = 0$, et ses racines, substituées dans le premier membre de la proposée, donnent respectivement ba^2 et $b(a^2 - b^2)$.

Le quotient est $1 - \frac{b^2}{a^2}$. La condition de réalité des trois racines de l'équation en x, et par suite des trois valeurs de ρ, est que ce quotient soit négatif, d'où $\frac{b^2}{a^2} > 1$. D'après cela:

La surface cubique symétrique possède une ou trois sphérosymétriques réelles évanouissantes, suivant que ses 24 droites à distance finie sont imaginaires ou réelles.

19. Si l'on mène par l'origine une droite ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, elle rencontre la surface en trois points, et les distances ρ_1, ρ_2, ρ_3 de ces trois points à l'origine sont les racines de l'équation

$$2\alpha\beta\gamma\rho^3 - b(\rho^2 - a^2) = 0.$$

La somme algébrique des trois distances, égale à $\frac{b}{2\alpha\beta\gamma}$, est indépendante de a^2. Par conséquent:

La somme des longueurs interceptées à partir de l'origine, sur une droite donnée, par toutes les cubiques symétriques qui ont mêmes plans de symétrie est proportionnelle à l'arête du tétraèdre de référence et indépendante du rayon de la sphère directrice.

Si l'on prend, sur chaque droite menée par l'origine, le centre de gravité des trois points de rencontre avec une cubique symétrique donnée, le lieu de ce centre est la surface:

$$6xyz - b(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

C'est une cubique symétrique à sphère directrice évanouissante.

Faisons varier la direction α, β, γ de façon que l'une des racines de l'équation en ρ ne change pas. Pour cela, il faut et il suffit que le produit $\alpha\beta\gamma$ soit constant, et par suite les deux autres racines ne changent pas non plus. Il en résulte que:

Tout cone ayant son sommet à l'origine et passant par une sphérosymétrique de la surface coupe celle-ci suivant deux autres sphérosymétriques.

Observons encore que les deux racines, 0 et $\frac{b}{3\alpha\beta\gamma}$, de l'équation dérivée, substituées dans l'équation primitive, donnent respectivement au

premier membre les valeurs ba^2 et $ba^2 - \frac{b^3}{27\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, dont le rapport est $1 - \frac{1}{27\alpha^2\beta^2\gamma^2} \times \frac{b^2}{a^2}$. La condition nécessaire et suffisante pour la réalité des trois valeurs de ρ est que ce rapport soit négatif, ou bien que $27\alpha^2\beta^2\gamma^2$ soit inférieur à $\frac{b^2}{a^2}$. Comme on a toujours $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, la valeur maxima de $27\alpha^2\beta^2\gamma^2$ est l'unité. Par conséquent, si b est supérieur à a (autrement dit si les droites de la surface sont réelles) tous les rayons vecteurs issus de l'origine rencontrent la surface en trois points réels. Dans le cas contraire, ils rencontrent la surface en un ou trois points, suivant qu'il sont d'un côté ou de l'autre du cone circonscrit ayant son sommet à l'origine. Si a est imaginaire ce cone est également imaginaire, et tous les rayons vecteurs rencontrent la surface en un seul point réel.

20. Si l'on cherche la section faite dans la surface par une sphère de rayon R ayant son centre sur l'un des axes binaires, oz par exemple, à une distance m de l'origine, on trouve que pour $R = \sqrt{m^2 + a^2}$ la section se décompose en un cercle, situé dans le plan principal xoy, et une conique sphérique projetée sur le même plan suivant l'hyperbole équilatère $xy = mb$. Par chaque point de la surface passent ainsi trois coniques sphériques, situées sur trois sphères dont chacune contient l'un des trois cercles situés dans les plans principaux. Chacune de ces sphères touche la surface en quatre points situés sur le cercle correspondant. Pour $m^2 + a^2 = 0$, le rayon R s'annule, et le centre de la sphère est un foyer. Il y a ainsi six foyers, situés sur les axes binaires, aux points où ils sont rencontrés par une sphère orthogonale et concentrique à la sphère directrice. Si la sphère directrice est réelle, les foyers sont imaginaires, et inversement. Pour les valeurs de m égales à $-b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$, la conique sphérique se décompose en deux cercles imaginaires; on retrouve ainsi les 24 cercles imaginaires dont il a déjà été parlé. On voit en même temps qu'il existe, en dehors de la sphère directrice, douze sphères, réelles ou imaginaires, rencontrant chacune la surface suivant trois cercles, dont deux imaginaires.

21. Il est facile de trouver les trajectoires orthogonales des cu-

biques symétriques possédant le même tétraèdre de référence. Les équations différentielles d'une telle courbe sont:

$$\frac{dx}{yz - bx} = \frac{dy}{zx - by} = \frac{dz}{xy - bz},$$

b désignant une constante. On les vérifie en posant:

$$x = \quad bkt \operatorname{sn}(t + C)$$
$$y = - bikt \operatorname{cn}(t + C)$$
$$z = - bit \operatorname{dn}(t + C).$$

Dans ces formules, t est une variable auxiliaire, C est une constante arbitraire, et k est le module, également arbitraire, des fonctions elliptiques qui figurent dans les seconds membres. Les résultats sont réels pourvu que t et k soient réels, que k soit inférieur à l'unité, et que C soit égal à $h + k'i$, h étant réel et k' étant le module complémentaire $\sqrt{1 - k^2}$.

Il est également aisé de trouver les trajectoires orthogonales des cubiques symétriques qui possèdent même sphère directrice et mêmes plans principaux. Si l'on élimine le paramètre variable b entre les équations différentielles précédentes et celle de la surface cubique, il vient:

$$\frac{xdx}{y^2 + z^2 - x^2 - a^2} = \frac{ydy}{z^2 + x^2 - y^2 - a^2} = \frac{zdz}{x^2 + y^2 - z^2 - a^2}$$

et l'on vérifie ces nouvelles équations en posant:

$$x^2 = a^2 + t + \frac{\alpha}{t^2},$$

$$y^2 = a^2 + t + \frac{\beta}{t^2},$$

$$z^2 = a^2 + t + \frac{\gamma}{t^2}.$$

Les constantes α, β, γ sont assujetties à la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

En éliminant t de deux façons différentes, on peut représenter une trajectoire orthogonale par les deux équations:

$$(\beta - \gamma)x^2 + (\gamma - \alpha)y^2 + (\alpha - \beta)z^2 = 0,$$

$$(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2)^2 = 9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Lorsque α, β, γ varient en restant infiniment petits du premier ordre, les trajectoires restent infiniment voisines de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. Il résulte d'ailleurs des considérations exposées dans la première partie que cette sphère coupe orthogonalement les surfaces cubiques dont la sphère directrice a un rayon égal à a.

Le lieu des trajectoires qui vérifient la condition:

$$(n - p)\alpha + (p - m)\beta + (m - n)\gamma = \frac{1}{9},$$

m, n, p désignant des constantes arbitraires, est la surface:

$$[(n - p)x^2 + (p - m)y^2 + (m - n)z^2](x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2) = 1$$

qui rencontre par suite orthogonalement la famille de surfaces cubiques considérée.

22. La plus simple des surfaces cubiques symétriques est la surface élémentaire $xyz = p^3$, caractérisée par un tétraèdre de référence infiniment petit et une sphère directrice infiniment grande. Sa réciproque, relativement à une sphère centrale, est une surface de même nature; en prenant le rayon de la sphère égal à $3p$, la surface coïncide avec sa réciproque. Elle jouit donc à la fois des propriétés générales des surfaces élémentaires et de celles de leurs réciproques. En outre, les plans tangents communs à la surface cubique élémentaire et à une sphère centrale touchent la surface élémentaire suivant une ligne le long de laquelle la courbure totale est constante. Deux plans de symétrie perpendiculaires interceptent sur chaque normale, à partir de son pied, des longueurs égales et de signes contraires. La surface élémentaire peut être regardée comme l'enveloppe d'un ellipsoïde dont les trois plans principaux sont fixes et dont le volume est constant; la surface élémentaire et l'ellipsoïde ont, au point de contact, mêmes directions principales, et leurs rayons de courbure en ce point sont proportionnels, mais tournés en sens con-

traires. Le rapport de proportionnalité est constant et égal à $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Les lignes asymptotiques ont pour équations, en appellant α et β les racines cubiques imaginaires de l'unité:

$$x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 = Const.,$$

$$x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2 = Const.$$

Les lignes de courbure, trouvées par M. SERRET, se déduisent sans peine de la connaissance des lignes asymptotiques, et sont déterminées par l'équation:

$$(x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2)^{\frac{3}{2}} \pm (x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2)^{\frac{3}{2}} = Const.$$

La démonstration de toutes ces propriétés ne présente aucune difficulté.

23. Une autre surface cubique symétrique qui mérite de fixer l'attention est celle qui a pour équation, en coordonnées tétraédriques:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0$$

et dont il a déjà été parlé au n° **15**. On va voir qu'il est possible de déterminer, sous forme finie, les équations de ses lignes asymptotiques. Nous allons même résoudre ce problème dans le cas général de la surface tétraédrale symétrique simple d'ordre quelconque:

$$(1) \qquad t^m + u^m + v^m + w^m = 0$$

où m est une constante arbitraire.[1] Par différentiation, on obtient:

$$t^{m-1}dt + u^{m-1}du + v^{m-1}dv + w^{m-1}dw = 0$$

et cette équation est satisfaite pour tout déplacement dt, du, dv, dw exécuté dans le plan tangent au point considéré. Si ce déplacement est effectué suivant une direction asymptotique, il se trouve également dans

---

[1] M. DARBOUX (Bulletin des sciences mathématiques, tome I) a ramené la recherche des lignes asymptotiques des surfaces $Ax^m + By^m + Cz^m + Dt^m = 0$ à l'intégration d'une équation de la forme: $\frac{d\rho^2}{(\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)} = K \frac{d\rho_1^2}{(\rho_1 - a)(\rho_1 - b)(\rho_1 - c)}$. Le procédé que nous indiquons ici ne nécessite pour ainsi dire aucune intégration.

le plan tangent au point $t + dt$, $u + du$, $v + dv$, $w + dw$, et l'on a par suite:

$$(t + dt)^{m-1}dt + (u + du)^{m-1}du + (v + dv)^{m-1}dv + (w + dw)^{m-1}dw = 0,$$

d'où l'on tire la nouvelle équation:

$$(2) \qquad t^{m-2}dt^2 + u^{m-2}du^2 + v^{m-2}dv^2 + w^{m-2}dw^2 = 0.$$

On a d'ailleurs la relation fondamentale:

$$(3) \qquad t + u + v + w = h.$$

Si l'on peut trouver un système de valeurs de t, u, v, w satisfaisant à la fois aux équations (1), (2) et (3), les lignes asymptotiques sont par cela même déterminées. Il suffit même d'avoir deux relations homogènes entre t, u, v, w vérifiant les équations (1) et (2); ces relations donneront les rapports des quatre variables, et il sera ensuite aisé de trouver des valeurs absolues compatibles avec l'équation (3). Occupons nous donc des équations (1) et (2), et posons:

$$t^m = T^2, \qquad u^m = U^2, \qquad v^m = V^2, \qquad w^m = W^2.$$

Ces équations deviennent:

$$(4) \qquad T^2 + U^2 + V^2 + W^2 = 0$$

$$(5) \qquad dT^2 + dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0.$$

En mettant la seconde sous la forme:

$$(dT + idU)(dT - idU) = -(dV + idW)(dV - idW).$$

on aperçoit la solution:

$$(6) \qquad T + iU = -\lambda(V + iW)$$

$$(7) \qquad T - iU = \frac{1}{\lambda}(V - iW)$$

où λ est une constante arbitraire. Ces deux équations entraînent d'ailleurs l'équation (4); ce sont donc les équations d'une ligne asymptotique

de la surface. En faisant disparaître les imaginaires, on parvient à la suite de transformations faciles à la nouvelle équation:

$$(\lambda^2 + 1)^4(V^2T^2 + U^2W^2) + (\lambda^2 - 1)^4(W^2T^2 + U^2V^2) \\ + 16\lambda^4(V^2W^2 + U^2T^2) = 0.$$

Posant alors:

$$M = (\lambda^2 + 1)^2, \qquad N = -(\lambda^2 - 1)^2, \qquad P = 4\lambda^2,$$

et revenant aux variables t, u, v, w, on voit que la ligne asymptotique est située sur la surface auxiliaire:

$$(8) \quad M^2(v^m t^m + u^m w^m) + N^2(w^m t^m + u^m v^m) + P^2(v^m w^m + u^m t^m) = 0$$

avec la condition, imposée aux constantes M, N, P:

$$(9) \qquad M + N + P = 0.$$

Par chaque point de la surface symétrique passent deux surfaces (8), correspondant aux deux valeurs de $\frac{M}{N}$ auxquelles conduit l'élimination de P entre les équations (10) et (11), et pivotant autour des points fixes communs aux trois surfaces:

$$v^m t^m + u^m w^m = 0,$$
$$w^m t^m + u^m v^m = 0,$$
$$v^m w^m + u^m t^m = 0.$$

On obtient ainsi les deux lignes asymptotiques qui se croisent en chaque point. Les deux valeurs de $\frac{M}{N}$ coïncident lorsque l'on a:

$$(10) \qquad (t^m + u^m + v^m + w^m)\sum t^m u^m v^m - 4t^m u^m v^m w^m = 0.$$

La surface représentée par cette équation rencontre la surface donnée (1) suivant 4 lignes planes, situées dans les faces du tétraèdre de référence, et formant la courbe parabolique de la surface (1). En outre, elle peut être regardée comme le lieu des points pour lesquels les deux valeurs du paramètre $\frac{M}{N}$ qui figure dans l'équation (8) sont égales, et par conséquent elle est l'enveloppe des surfaces (8).

Chaque fois que m est commensurable, la surface tétraédrique est algébrique et il en est de même de ses lignes asymptotiques.

24. Lorsque la surface cubique symétrique contient les arêtes d'un tétraèdre, chacune de ces arêtes coïncide avec deux droites du premier système, et l'équation devient alors:

$$(1) \qquad 2xyz - a(x^2 + y^2 + z^2) + a^3 = 0.$$

Les droites du second système coïncident avec celles du premier. Chaque sommet du tétraèdre inscrit est un noeud de la surface. Les sections faites pas des plans parallèles à xoy donnent, en projection sur ce plan, un système de coniques inscrites dans un même carré. L'équation de la surface en coordonnées tétraédriques, est:

$$(2) \qquad t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = \frac{h^3}{4}$$

avec la condition habituelle:

$$t + u + v + w = h.$$

Le tétraèdre de référence est le symétrique, par rapport au centre, de celui qui contient les droites de la surface; on peut dire que ces deux tétraèdres sont *complémentaires* l'un de l'autre. Pour avoir l'équation de la surface rapportée au tétraèdre inscrit, il suffit de remplacer chaque coordonnée par son complément à $\frac{h}{2}$, et il vient:

$$(3) \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0.$$

C'est la forme connue de l'équation de la surface réciproque de celle de STEINER. On en conclut, en vertu du paragraphe précédent, que les lignes asymptotiques se trouvent sur les quadriques:

$$(4) \qquad M^2(uw + vt) + N^2(uv + wt) + P^2(ut + vw) = 0$$

pourvu que $M + N + P$ soit égal à zéro.[1]

[1] Ce résultat a été obtenu par M. LAGUERRE, dans ses belles recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de STEINER (Nouvelles Annales de mathé-

L'équation (4) se déduit de l'équation (8) du paragraphe précédent en faisant $m = 1$. On conclut de là, sans nouveau calcul, que la famille de quadriques a pour enveloppe la surface:

$$(5) \qquad (vt + uw)(wt + uv) + (vt + uw)(vw + ut) + (vw + ut)(wt + uv) = 0.$$

Ce qui, en tenant compte de la relation $t + u + v + w = h$, peut se mettre sous la forme:

$$(6) \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{4}{h} = 0.$$

Si l'on revient au tétraèdre de référence primitif en remplaçant t par $\frac{h}{2} - t$, u par $\frac{h}{2} - u$, etc., l'équation (6) ne change pas. Or, avec ce tétraèdre la surface cubique a pour équation (2), et les formules du § 14 montrent alors que l'équation (6) représente le hessien de la surface cubique. Donc:

L'enveloppe des quadriques coupant la surface cubique suivant ses lignes asymptotiques est le hessien de cette surface; ce hessien a même équation par rapport au tétraèdre inscrit et par rapport au tétraèdre complémentaire. Il jouit de la symétrie cuboctaédrique.

On peut remarquer aussi que *si deux cubiques symétriques sont circonscrites à deux tétraèdres complémentaires, elles ont même hessien, et leurs lignes asymptotiques se trouvent sur les mêmes quadriques, passant par les sommets des deux tétraèdres.*

Sans insister sur les autres propriétés de la surface cubique circonscrite à un tétraèdre, nous allons indiquer comment son équation peut se mettre sous la forme de déterminant, qui a servi de point de départ

---

matiques, 1872), comme application de la théorie des formes biquadratiques simultanées. Le même auteur l'a établi par une autre voie dans son article *Sur la représentation sur un plan de la surface du 3ᵉ ordre qui est la réciproque de la surface de* STEINER, inséré au tome I du Bulletin de la société mathématique de France.

aux recherches de M. LAGUERRE. Considérons les cinq fonctions linéaires:

$$a = T + U + V + W,$$
$$b = AT + BU + CV + DW,$$
$$c = A^2T + B^2U + C^2V + D^2W,$$
$$d = A^3T + B^3U + C^3V + D^3W,$$
$$e = A^4T + B^4U + C^4V + D^4W,$$

où A, B, C, D sont quatre constantes, et posons:

$$T = (B - C)^2(C - D)^2(D - B)^2 \times t,$$
$$U = (A - D)^2(D - C)^2(C - A)^2 \times u,$$
$$V = (A - B)^2(B - D)^2(D - A)^2 \times v,$$
$$W = (A - B)^2(B - C)^2(C - A)^2 \times w,$$
$$\Pi^2 = (A - B)^2(A - C)^2(A - D)^2(B - C)^2(B - D)^2(C - D)^2,$$

il vient:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \Pi^4 \Sigma tuv.$$

L'équation

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$$

est donc équivalente à:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

25. La surface de STEINER, réciproque de la précédente, a été tellement étudiée qu'il serait superflu de revenir sur ce sujet. Observons seulement qu'en mettant son équation sous la forme:

$$\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0,$$

les formules du n° 23 donnent immédiatement ses lignes asymptotiques. Ces lignes ont été déterminées par CLEBSCH (Journal de CRELLE, 1867) en faisant intervenir la représentation de la surface sur un plan.

26. Une autre surface remarquable du 4ème ordre, pourvue de la symétrie tétraédrique, est celle qu'on déduit de la cubique symétrique à point isotrope:

$$2XYZ + b(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$$

en prenant cette dernière surface comme lieu des centres d'une sphère mobile qui coupe orthogonalement une sphère centrale fixe, et cherchant l'enveloppe de la sphère mobile. Si R est le rayon de la sphère fixe, les formules de transformation, données par M. DARBOUX dans son ouvrage déjà cité au § 10, sont:

$$X = \frac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \qquad Y = \frac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \qquad Z = \frac{2R^2z}{x^2+y^2+z^2+R^2}.$$

Il vient ainsi:

$$4R^2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) = 0.$$

Cette surface, anallagmatique par rapport à la sphère fixe, diffère essentiellement des surfaces anallagmatiques ordinaires du 4ème ordre, autrement dit des cyclides. Au lieu d'être anallagmatique par rapport à 5 sphères, elle jouit de cette propriété par rapport à 6 plans et à une sphère. Au lieu d'admettre le cercle de l'infini comme ligne double, elle est tangente au plan de l'infini le long de ce cercle, qui fait par conséquent partie de la courbe parabolique et constitue une ligne de courbure singulière. Elle possède en outre à l'origine un point isotrope.

27. La plupart des surfaces tétraédriques dont nous avons parlé jusqu'ici rentrent dans le type général $xyz = f(x^2 + y^2 + z^2)$. Ce sont des surfaces binaires, jouissant comme telles des propriétés établies au n° 5. Parmi les surfaces qui n'appartiennent pas à ce type nous mentionnerons la surface:

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2axyz = 0$$

dont parle M. TISSERAND, dans son *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal,* et qui est coupée suivant quatre cercles par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Comme exemple de surface transcendante, citons la surface binaire $xyz = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ dont l'équation se ramène à la forme $XYZ = 1$ en posant $X = xe^{x^2}$, $Y = ye^{y^2}$, $Z = ze^{z^2}$.

Troisième partie. Surfaces du type cuboctaédrique.

28. Le type cuboctaédrique est caractérisé par 9 plans de symétrie, savoir les trois faces d'un trièdre trirectangle et les 6 plans bissecteurs de ce trièdre. Les faces du trièdre sont parallèles à celles du cube. Les six autres plans contiennent chacun deux arêtes parallèles du même polyèdre. L'existence de ces plans de symétrie entraîne celle d'un centre, de 3 axes quaternaires (les arêtes du trièdre trirectangle), de 4 axes ternaires (les diagonales du cube), de 6 axes binaires (joignant chacun les milieux de deux arêtes parallèles du cube). Les faces de l'octaèdre conjugué sont perpendiculaires aux axes ternaires.

Prenons comme axes de coordonnées les 3 axes quaternaires. Toute équation $\varphi(x^2, y^2, z^2) = 0$ dont le premier membre est une fonction symétrique des carrés des variables représente évidemment une surface cuboctaédrique. Pour former méthodiquement les équations de ce genre d'après notre procédé général, nous devons remarquer que les trois plans de coordonnées, que nous appellerons plans principaux, sont des plans de symétrie, ce qui nous empêche de prendre comme élément symétrique le produit xyz; mais nous pouvons prendre le carré $x^2y^2z^2$. Le produit des distances aux plans perpendiculaires aux axes quaternaires (plans *directeurs*) fournit un autre élément. Nous prendrons donc:

$$M = x^2y^2z^2$$

$$N = x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2;$$

et l'équation générale des surfaces cuboctaédriques ne diffère par suite de celle des surfaces tétraédriques que par l'absence des puissances impaires de xyz. On aurait pu énoncer immédiatement ce résultat, en se rappelant qu'on passe d'un système à l'autre par l'addition d'un centre de symétrie. Les deux éléments M et N ont pour ordres $m = 6$, $n = 4$,

d'où l'on tire $m + n - 1 = 9$. C'est le nombre des plans de symétrie du cube, et l'on se trouve ainsi dans le cas examiné au n° 2.

La surface cuboctaédrique différente d'une sphère est au minimum du 4e degré. En désignant par A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', une suite de constantes et posant $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, l'équation de la *quartique symétrique* peut se mettre indifféremment sous l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$(1) \quad x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2 + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0$$

$$(2) \quad x^4 + y^4 + z^4 + A'\rho^4 + 2B'\rho^2 + C' = 0$$

$$(3) \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + A''\rho^4 + 2B''\rho^2 + C'' = 0.$$

Remarquons que, pour une même surface, l'on a $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} = \frac{C''}{B''}$. Considérons la troisième forme, et supposons qu'on coupe la surface par un plan $z = h$, h étant déterminé au moyen de la condition:

$$h^4(1 + 4A''^2) + 4B''h^2 + 4B''^2 - 4A''C'' = 0.$$

La section se décompose en deux coniques ayant des équations de la forme:

$$xy \pm m(x^2 + y^2 + n) = 0.$$

Ce sont deux coniques égales, ayant en commun deux diamètres rectangulaires égaux situés dans les plans zox, zoy. Une seule de ces coniques suffit d'ailleurs à déterminer la surface, et, comme ses équations dépendent de paramètres (h, m, n) qui sont en même nombre que dans l'équation de la surface, la conique peut être choisie arbitrairement parmi celles qui occupent la situation indiquée. En conséquence:

La quartique symétrique peut être engendrée par une sphérosymétrique du 8e ordre, assujettie à s'appuyer constamment sur une conique parallèle à l'un des plans principaux et symétrique par rapport à deux plans diagonaux du cube.

29. Une sphérosymétrique du 8ème ordre a deux équations qu'on peut écrire:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Const.$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = Const.$$

On vérifie sans peine qu'elle est orthogonale à tous les cones:

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = 0$$

pourvu que la somme $a + b + c$ soit nulle.

Ces cones passent par les diagonales du cube et admettent les axes quaternaires comme lignes doubles. Suivant une expression déjà employée, ce sont les cones *inverses* de ceux qui sont normaux aux sphérosymétriques du 6ème ordre. Toute surface cuboctaédrique binaire, c'est à dire ayant une équation indépendante de l'élément $x^2y^2z^2$, est une trajectoire orthogonale de cette famille de cones.

30. L'équation de la quartique symétrique peut s'écrire, comme on l'a vu:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0.$$

Soient a^2, b^2 les racines (positives ou négatives) du trinome $A\rho^4 + 2B\rho^2 + C$. On peut encore écrire:

$$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(- x + y + z) = A(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2),$$

et la surface est par conséquent le lieu de l'intersection des deux quadriques:

$$(1) \quad \begin{aligned} (x + y + z)(\ \ x + y - z) &= A\lambda(\rho^2 - a^2) \\ (x - y + z)(- x + y + z) &= \frac{1}{\lambda}(\rho^2 - b^2), \end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire. On remarque que les sections cycliques centrales de ces deux faisceaux de quadriques sont invariables, et que les plans cycliques de l'un des faisceaux sont symétriques de ceux de l'autre par rapport au plan zox. Toutes ces quadriques ont mémes plans principaux. La correspondance peut être définie géométriquement par la condition que la courbe d'intersection s'appuie sur la conique trouvée au n° 28.

L'intersection de deux surfaces du second ordre concentriques appartient à trois cylindres; c'est la courbe à laquelle Frezier et de la Gournerie ont donné le nom *d'ellipsimbre*. Si les deux surfaces ont

mêmes plans principaux, l'ellipsimbre admet ces plans comme plans de symétrie, et peut être appelée *ellipsimbre symétrique.* On voit, par ce qui précède, que:

Toute quartique symétrique est le lieu d'une ellipsimbre symétrique assujettie: 1° *à s'appuyer sur quatre cercles fixes, concentriques, et égaux deux à deux, symétriquement placés par rapport aux plans principaux de l'ellipsimbre;* 2° *à rencontrer en même temps une conique parallèle à l'un de ces plans et symétrique par rapport aux deux autres.*

L'ellipsimbre (1) rapportée à ses plans principaux, a pour équations:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2x^2 - z^2 &= A\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2), \\ 2y^2 - z^2 &= \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2 + z^2 - b^2). \end{aligned}$$

Elle est située sur le cone:

$$\begin{aligned} &[2b^2 + A\lambda(a^2 - b^2)]x^2 + A\lambda[a^2 - b^2 - 2\lambda a^2]y^2 \\ &\quad + [A\lambda^2 a^2 - A\lambda(a^2 + b^2) - b^2]z^2 = 0 \end{aligned}$$

qui coupe la surface suivant une seconde ellipsimbre. Pour les valeurs de λ qui annulent l'un des coefficients, le cone se décompose en deux plans, et les deux ellipsimbres se décomposent chacune en deux coniques situées sur la surface. Abstraction faite des valeurs 0 et ∞ de λ, qui correspondent aux sections circulaires, la décomposition a lieu en posant l'une des conditions:

$$\lambda = \frac{2b^2}{A(b^2 - a^2)}, \qquad \lambda = \frac{a^2 - b^2}{2a^2}, \qquad A\lambda^2 a^2 - A\lambda(a^2 + b^2) - b^2 = 0.$$

On trouve ainsi 8 plans rencontrant chacun la surface suivant deux coniques. Les quatre premiers passent chacun par un axe binaire, les quatre derniers, par un axe quaternaire. Chacun de ces plans touche la surface aux quatre points de rencontre des deux coniques qu'il renferme. Par chaque axe binaire, on peut ainsi faire passer deux plans quadritangents; par chaque axe quaternaire, on peut en faire passer quatre. Il y a par suite 24 plans quadritangents déterminant 48 coniques de la surface.

Il ne peut exister d'autres plans passant par le centre et coupant la surface suivant deux coniques. En effet, si on rend l'équation de la surface homogène par l'introduction d'une variable auxiliaire t, le lieu des points pour lesquels le plan tangent passe par l'origine s'obtient en égalant à zéro la dérivée par rapport à t. L'équation (1) du n° 28 donne ainsi $B\rho^2 + C = 0$. Le cone central circonscrit à la surface la touche donc suivant une courbe sphérique (sphérosymétrique). Ce cone est du quatrième ordre, et sa trace sur un plan quelconque est une quartique plane. Tout plan quadritangent passant par le centre a pour trace, sur le même plan, une bitangente de cette quartique. Comme une quartique a 28 bitangentes, il y a 28 plans quadritangents. Or nous connaissons précisément 28 plans de cette nature, à savoir les 24 plans dont il a été question ci dessus, et les quatre plans perpendiculaires aux axes ternaires (ceux-ci, coupant chacun la surface suivant 2 cercles concentriques, sont bitangents en deux points du cercle de l'infini).

31. Tout plan central coupe le cone central circonscrit suivant 4 droites, bitangentes à la section de la surface par le même plan. Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ sont les équations des 4 droites rapportées à deux axes rectangulaires menés par l'origine dans le plan sécant, et si R est le rayon de la sphérosymétrique de contact, l'équation de la section est de la forme:

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\rho^2 - R^2)^2$$

qui rentre dans la forme canonique donnée par Plücker pour l'équation des quartiques en général, savoir:

$$\alpha\beta\gamma\delta = V^2,$$

V étant une conique, et α, β, γ, δ, quatre droites généralement non concourantes. On remarque que les sections centrales jouissent d'une propriété projective, consistant en ce qu'elles ont quatre bitangentes concourantes. En partant de la forme canonique, il est facile de trouver les autres bitangentes d'une quartique. Il suffit, d'écrire l'identité:

$$\alpha\beta(\gamma\delta + 2pV + p^2\alpha\beta) = (V + p\alpha\beta)^2,$$

et de déterminer μ de manière que la conique:

$$\gamma\delta + 2pV + p^2\alpha\beta = 0$$

se décompose en deux droites p, q. L'équation prend alors la forme:

$$\alpha\beta pq = (V + \mu\alpha\beta)^2$$

et par conséquent p et q sont deux bitangentes.

D'une manière générale, lorsque C_1, C_2, C_3 sont trois coniques quelconques, l'équation en μ exprimant que $C_1 + 2\mu C_2 + \mu^2 C_3$ se décompose en deux facteurs linéaires est du 6ème degré. Mais ici, il y a une racine nulle et une infinie, correspondant aux deux couples $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$. On n'a donc en réalité à résoudre qu'une équation du 4ème degré, déterminant 8 couples de bitangentes. Chaque couple se compose évidemment de deux droites symétriques par rapport au centre. Les 4 droites α, β, γ, δ pouvant se grouper en deux couples de 3 manières différentes, on peut, de 3 manières, trouver 8 couples de bitangentes, soit en tout 24, qui, avec les 4 droites α, β, γ, δ complètent le nombre total. Toute bitangente de la quartique symétrique étant bitangente à une section centrale, la méthode précédente conduit à la détermination complète des bitangentes de la surface.

32. L'équation de la quartique symétrique ne renfermant que des puissances paires des coordonnées, on est naturellement amené à poser:

$$x^2 = X, \qquad y^2 = Y, \qquad z^2 = Z,$$

ce qui établit une correspondance entre les points de cette surface et ceux d'une surface de révolution du second degré. A chaque point de celle-ci correspondent, sur la quartique, les 8 sommets d'un cube. La surface du second ordre est de révolution autour de l'axe ternaire $X = Y = Z$. A ses parallèles correspondent les sphérosymétriques; à ses plans tangents correspondent des surfaces du second degré coupant la quartique suivant deux ellipsimbres; à ses deux systèmes de génératrices rectilignes correspondent deux systèmes d'ellipsimbres, et ainsi de suite. Les ellipsimbres que nous rencontrons ici ont leurs plans principaux parallèles aux faces du cube; elles diffèrent donc de celles que nous avons déterminées précédemment, et qui avaient deux plans de symétrie passant par les arêtes du cube.

33. Toute surface douée de la symétrie tétraédrique est représentée, en coordonnées tétraédrales, par une équation $\varphi(t, u, v, w) = 0$

symétrique par rapport aux coordonnées. Pour que la même surface jouisse de la symétrie cuboctaédrique, il faut et il suffit qu'elle possède un centre, et par suite que l'équation reste vérifiée quand on remplace t, u, v, w par $\frac{h}{2} - t$, etc., h étant la hauteur du tétraèdre de référence. Posons $\frac{h}{4} - t = T$, $\frac{h}{4} - u = U$, etc., d'où $\sum T = 0$. Les quantités T, U, V, W changent de signe sans changer de valeur absolue par la substitution dont il s'agit. La condition pour que la surface soit cuboctaédrique est donc que le premier membre de son équation soit une fonction paire ou impaire de T, U, V, W, symétrique par rapport à ces variables. Le produit $TUVW$ n'est autre chose que l'élément symétrique du 4er ordre. On a d'ailleurs $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}\sum T^2$. L'équation générale de la quartique symétrique est donc

$$TUVW + A(\sum T^2)^2 + 2B(\sum T^2) + C = 0$$

avec la condition $\sum T = 0$.

On peut aussi introduire les trois fonctions:

$$tu + vw = \lambda, \qquad tv + uw = \mu, \qquad tw + uv = \nu,$$

rencontrées déjà au n° 24. En vertu de l'identité:

$$\lambda = tu + vw = TU + VW + \frac{h^2}{8}$$

λ est une fonction paire de T, U, V, W. Il en est de même de μ et ν. D'après cela, toute équation $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ dont le premier membre est une fonction symétrique, entière et de degré n, par rapport à λ, μ, ν, représente une surface cuboctaédrique de degré $2n$. L'expression de λ en coordonnées cartésiennes est:

$$\lambda = \frac{2}{3}(x^2 - y^2 - z^2) + \frac{1}{8}h^2.$$

La surface $\lambda = 0$ est un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour de l'axe des x, et dont les génératrices se coupent à angle droit sur le

cercle de gorge. Cette surface contient les diagonales de quatre faces d'un cube. Sa méridienne est une hyperbole équilatère, et on peut l'appeler *hyperboloïde équilatère.*

Posons:

$$\varphi = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - p^2.$$

Nous avons l'identité:

$$(1) \qquad \lambda + \mu + \nu + \varphi = \frac{3}{8}h^2 - p^2.$$

Nous pouvons considérer λ, μ, ν, φ comme des coordonnées *quadratiques* égales aux puissances d'un point par rapport à une sphère centrale et à trois hyperboloïdes équilatères. Dans ce système, l'équation:

$$(2) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = Q\varphi^2,$$

où Q est une constante arbitraire, est l'équation générale des quartiques symétriques; car elle dépend de trois constantes arbitraires, savoir la hauteur h du tétraèdre de référence, le rayon de la sphère centrale (ou, ce qui revient au même, la constante p), enfin le coefficient Q. L'intérêt principal de cette forme d'équation consiste dans le rapprochement qu'elle établit entre les quartiques symétriques et les anallagmatiques du 4ème ordre. Celles-ci en effet, comme l'a montré M. Darboux, peuvent se représenter par une équation de la forme:

$$AS^2 + A'S'^2 + A''S''^2 + A'''S'''^2 = 0,$$

où S, S', S'', S''' sont les puissances par rapport à 4 sphères. Ici, 3 des sphères sont remplacées par des hyperboloïdes équilatères, genre de surfaces qui ne diffère de la sphère que par le signe du carré de l'un des axes. Seulement il convient de remarquer qu'en remplaçant les trois hyperboloïdes par les sphères conjuguées, on aurait ici quatre sphères concentriques, et l'équation obtenue représenterait deux sphères également concentriques.

L'équation d'une surface étant mise sous la forme précédente, on peut remplacer λ, μ, λ par $\lambda + \alpha$, $\mu + \alpha$, $\nu + \alpha$ et φ par $\varphi + \beta$, puis chercher quelles valeurs il faut attribuer aux constantes α et β pour que

la forme d'équation soit conservée. En posant pour abréger $P = \frac{3}{8}h^2 - p^2$, on trouve:

$$\beta = \frac{2P}{1 - 3Q}, \qquad \alpha = -\frac{2PQ}{1 - 3Q}.$$

Si donc Q est différent de $\frac{1}{3}$, la forme réduite peut être obtenue de deux manières différentes.

Par la combinaison des équations (1) et (2), il vient:

$$2(\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) = P^2 - 2P\varphi + (1 - Q)\varphi^2.$$

Le premier membre, égalé à zéro, représente (voir n° **24**) le hessien de la surface cubique symétrique circonscrite au tétraèdre de référence. La surface se réduit à ce hessien si l'on a à la fois $P = 0$ et $Q = 1$. $P = 0$ revient à dire que la sphère centrale a pour rayon $\frac{3}{4}h$, c'est à dire qu'elle est circonscrite au tétraèdre de référence. Cette condition étant supposée remplie, le hessien a pour équation quadratique:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \varphi^2.$$

34. On arrive à une forme d'équation encore plus simple en substituant aux 3 hyperboloïdes équilatères les trois surfaces de révolution obtenues en égalant à zéro les trois fonctions:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha x^2 + \beta(y^2 + z^2) + \gamma &= \lambda, \\ \alpha y^2 + \beta(z^2 + x^2) + \gamma &= \mu, \\ \alpha z^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma &= \nu. \end{aligned}$$

L'équation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = k$$

dépend des trois constantes $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \frac{\gamma}{k}$ et représente par suite la quartique symétrique la plus générale. En cherchant à l'identifier avec l'équation ordinaire:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

on trouve que la réduction peut se faire de deux manières différentes.

Les deux transformations sont ensemble réelles ou imaginaires, suivant que le cone asymptotique est imaginaire ou réel. Les deux transformations se réduisent à une seule pour $A = \frac{1}{3}$; mais alors le coefficient γ est infini ou indéterminé. Lorsque les deux transformations sont réelles, A est supérieur à $\frac{1}{3}$. S'il est compris entre 1 et 3, l'un des systèmes de quadriques (1) se compose d'ellipsoïdes, et l'autre d'hyperboloïdes. Dans le cas contraire, les deux systèmes se composent d'ellipsoïdes. Les ellipsoïdes ne sont réels que si B est négatif.

35. Cherchons maintenant les droites réelles qui peuvent appartenir à la quartique symétrique. D'après ce qui a été dit au n° **7**, ces droites sont perpendiculaires aux plans de symétrie. On peut le voir aussi au moyen des résultats établis au n° **30**. En effet, la droite D', symétrique d'une droite D par rapport au centre, appartient en même temps qu'elle à la surface, et les deux droites déterminent un plan central P qui coupe la surface suivant deux coniques (dont l'une formée par les deux droites). Ce plan contient donc soit un axe binaire, soit un axe quaternaire, ce qui exige qu'il soit normal à un plan de symétrie Π. Il coupe par suite les plans directeurs suivant des droites symétriquement placées par rapport à la trace du plan de symétrie; la droite D, étant assujettie à couper ces mêmes droites en des points situés sur les circonférences déterminées par le plan P dans les sphères directrices, est évidemment perpendiculaire au plan de symétrie Π.

Considérons d'abord une droite perpendiculaire à l'un des plans principaux, et parallèle par conséquent à l'un des axes quaternaires, oz par exemple. Soient $x = \alpha$, $y = \beta$ ses équations. Portant ces valeurs de x et de y dans l'équation de la surface mise sous la forme (1) du n° **28**, et annulant les coefficients des différentes puissances de z, nous avons les conditions:

$$A = -1,$$

$$B = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$B^2 + C = 4\alpha^2\beta^2.$$

La condition $A = -1$ réduit l'équation du cone asymptotique à

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0;$$

ce cone n'admet donc pas d'autres génératrices réelles que les axes quaternaires. Les deux autres conditions montrent que, pour la réalité de α et β, on doit avoir:

$$B > 0,$$

$$3B^2 + 4C < 0.$$

Soient P_1 et P_2 les carrés des rayons des sphères directrices. On a:

$$P_1 + P_2 = -\frac{2B}{A} \quad \text{et} \quad P_1 P_2 = \frac{C}{A}.$$

Faisant $A = -1$, et tenant compte de ces relations, les inégalités précédentes deviennent:

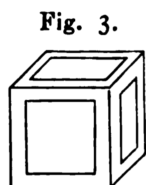
$$P_1 + P_2 > 0,$$

$$\left(3 - \frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{P_2}{P_1}\right) < 0.$$

D'après cela, le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ doit être positif et compris entre 3 et $\frac{1}{3}$; P_1 et P_2 doivent être tous les deux positifs. De cette discussion on conclut, eu égard à la symétrie de la surface, que:

La quartique symétrique contient 24 droites parallèles aux axes quaternaires lorsque son cone asymptotique se réduit à ces axes. Les 24 droites sont réelles si les sphères directrices sont réelles, et si le carré du plus grand rayon est inférieur à trois fois le carré du plus petit; autrement dit, si les faces du cube inscrit dans la plus grande sphère rencontrent réellement la plus petite.

Fig. 3.



Il est évident que les 24 droites sont disposées suivant 6 carrés, placés sur les faces d'un cube, comme l'indique la fig. 3. Par chaque droite, on peut faire passer, outre deux plans parallèles aux faces du cube, cinq plans qui contiennent chacun une seconde droite et déterminent autant de coniques de la surface; ce sont des plans quatritangents. Il existe 60 plans de cette nature, qui font connaître 60 coniques. Parmi les 5 plans qui passent par l'une des droites, il y a un plan central. On a ainsi 12 plans centraux quatritangents; ce sont les 12 plans, contenant chacun un axe quaternaire, trouvés déjà au n° 30.

Il y a deux cubes passant par les 24 droites; les demies longueurs de leurs arêtes sont les quantités α et β. Ces deux cubes se confondent quand on prend $3P_2 = P_1$, ce qui exprime que le cube circonscrit à l'une des sphères directrices est inscrit à l'autre. Les 24 droites se réduisent alors aux 12 arêtes d'un cube, et celles-ci sont tangentes à la plus petite sphère directrice. La surface possède dans ce cas 8 points coniques (les sommets du cube). Son équation peut s'écrire:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) + 3\alpha^4 = 0.$$

36. Considérons actuellement une droite perpendiculaire à l'un des plans diagonaux du cube, et parallèle par conséquent à un axe binaire. Ses équations sont, par exemple:

$$y = x + \alpha, \qquad z = \beta.$$

Portant dans l'équation de la surface, et écrivant que l'équation en x est identiquement satisfaite, il vient:

$$A = 0,$$

$$\alpha^2 = -\frac{C}{4B} - \frac{3}{4}B,$$

$$\beta^2 = -\frac{C}{4B} + \frac{1}{4}B.$$

Remarquons qu'en vertu de la condition $A = 0$, l'une des sphères directrices disparaît à l'infini et le rayon R de l'autre sphère satisfait à la relation:

$$2BR^2 + C = 0$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{3B}{4},$$

$$\beta^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{B}{4},$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 2R^2.$$

Il faut donc, pour la réalité de la droite considérée, que la sphère di-

rectrice unique soit réelle. Il faut en outre que B soit compris entre $-2R^2$ et $\frac{2R^2}{3}$. Si ces conditions sont remplies, la surface possède 24 droites réelles, disposées en facettes triangulaires sur les sommets d'un cube (fig. 4). La demie arête de ce cube est égale à β, et l'on a $\beta^2 < \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{6}$, ou $\beta < \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ce qui veut dire que les côtés des carrés inscrits dans les faces du cube rencontrent réellement la sphère directrice. On peut également placer les 24 droites sur les faces d'un octaèdre régulier (fig. 5).

Fig. 4.

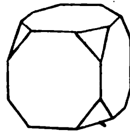
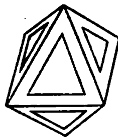


Fig. 5.



Les 24 droites se réduisent aux 12 arêtes de l'octaèdre régulier lorsqu'elles rencontrent les axes quaternaires, ce qui a lieu pour $\beta = 0$, d'où $B = -2R^2$. L'équation de la surface circonscrite à un octaèdre régulier est donc:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 4R^2(x^2 + y^2 + z^2) + 4R^4 = 0.$$

Cette surface possède 6 points coniques. Sa sphère directrice, de rayon R, touche les 12 droites, arêtes de l'octaèdre; résultat facile à prévoir, car les milieux de ces arêtes se trouvent sur les plans directeurs.

Lorsque B atteint sa limite supérieure $\frac{2R^2}{3}$, l'on a $\alpha = 0$ et la surface contient les diagonales des faces d'un cube, c'est à dire les arêtes de deux tétraèdres complémentaires. Nous l'appellerons surface *bitétraédrique*. Cette surface a 8 points coniques. Son équation est:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 + \frac{4}{3}R^2(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{4}{3}R^4 = 0.$$

La demie arête de chaque tétraèdre est égale à $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Si l'on considère une sphère interceptant sur chaque arête du tétraèdre une longueur égale à la moitié de cette arête, son rayon est

$$\sqrt{\frac{2R^2}{3} + \frac{R^2}{3}} = R;$$

c'est donc la sphère directrice, résultat qu'on obtiendrait immédiatement en se rappelant que la sphère directrice passe par les intersections des droites de la surface avec les plans directeurs.

La hauteur h de chaque tétraèdre est égale à son arête multipliée par $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ou bien à $\frac{4R\sqrt{2}}{3}$. L'équation de la surface peut donc s'écrire:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$

$$+ 6\left(\frac{h}{4}\right)^2(x^2 + y^2 + z^2) - 27\left(\frac{h}{4}\right)^4 = 0.$$

En prenant l'un des tétraèdres comme tétraèdre de référence, il vient:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{4}{h}.$$

On reconnaît le hessien de la surface cubique symétrique circonscrite au tétraèdre (voir n° 24).

Donc: *la bitétraédrique est la surface hessienne de la cubique symétrique circonscrite à l'un ou l'autre de ses tétraèdres inscrits.*

Il est facile de voir que chaque face du cube touche la surface tout le long des deux diagonales. D'après cela, toute section plane de la surface admet pour bitangentes les traces des 6 faces du cube; ces bitangentes sont parallèles deux à deux. D'après ce qui a été dit au n° 24, la même surface peut être régardée comme l'enveloppe du faisceau de quadriques:

$$M^2(uw + vt) + N^2(uv + wt) + P^2(ut + vw) = 0, \qquad (M + N + P = 0)$$

ou bien:

$$(M^2 - N^2 - P^2)x^2 + (-M^2 + N^2 - P^2)y^2$$

$$+ (-M^2 - N^2 + P^2)z^2 + \frac{1}{8}h^2(M^2 + N^2 + P^2) = 0.$$

Ce sont des hyperboloïdes *rectangles.*

L'équation de la surface bitétraédrique peut encore s'écrire:

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = 0,$$

a représentant la demie arête $\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ du cube circonscrit aux deux tétraèdres.

37. Une surface du $4^{\text{ème}}$ degré, sans points singuliers, possède 3200 plans tritangents, dont nous allons chercher la disposition sur la quartique symétrique. Les plans tangents perpendiculaires à un plan de symétrie peuvent se déterminer en prenant ce plan comme plan des xy et joignant à l'équation $f(x, y, z^2) = 0$ de la surface l'équation

$$f'(z) = 2zf'_{z^2}(x, y, z^2) = 0.$$

Si on laisse de côté la solution $z = 0$, qui donne des points de contact situés dans le plan de symétrie, le cylindre enveloppé par les plans tangents considérés a pour trace la courbe obtenue en éliminant z^2 entre les deux équations $f = 0$, $f'_{z^2} = 0$; c'est une courbe du $4^{\text{ème}}$ degré. Chaque tangente à cette courbe est la trace d'un plan tangent qui touche la surface en deux points symétriques par rapport au plan des xy, c'est à dire d'un plan bitangent. Chaque bitangente est la trace d'un plan quatritangent; aux 28 bitangentes de la courbe correspondent ainsi 28 plans quatritangents de la surface. Les 9 plans de symétrie déterminent d'après cela $9 \times 28 = 252$ plans quatritangents, mais ces plans ne sont pas tous distincts. D'abord, il y a 4 plans quatritangents perpendiculaires à chaque axe quaternaire, car on obtient par exemple les plans de ce genre perpendiculaires à Oz en éliminant x^2 et y^2 entre l'équation de la surface et ses deux dérivées partielles relatives à x et y, débarrassées des solutions $x = y = 0$, et il vient ainsi une équation bicarrée en z. Chaque plan perpendiculaire à Oz, étant perpendiculaire à 4 plans de symétrie, compte pour 4 dans l'énumération précédente, et il y a de ce chef 48 plans quatritangents qui se réduisent à 12. Chaque axe binaire est également perpendiculaire à 4 plans quatritangents; ceux là, étant perpendiculaires chacun à 2 plans de symétrie, comptent pour 2, et il en résulte qu'il y a 4 plans quatritangents se réduisant à 12 distincts. Enfin, chaque plan directeur, coupant la surface suivant deux cercles concentriques, est un plan quatritangent à l'infini, perpendiculaire à trois plans de symétrie, et compte par conséquent pour trois. On a ainsi:

12	plans	comptant	pour	48
12	»	»	»	24
4	»	»	»	12
28	»	»	»	84.

Il reste 252 — 84 = 168 plans quatritangents perpendiculaires à un seul plan de symétrie, et l'on a au total 168 + 28 = 196 plans quatritangents distincts, équivalant à 196 × 4 = 784 plans quatritangents. En dehors de ceux-ci, on doit avoir encore 3200 — 784 = 2416 plans tritangents, déterminant autant de quartiques unicursales. Il est aisé de voir que chaque axe ternaire est perpendiculaire à 4 plans tritangents, ce qui en donne 16. Les autres sont au nombre de 2400. Le polyèdre général qui jouit de la symétrie cubique ayant 48 faces (hexoctaèdre), on voit en définitive qu'il doit y avoir 50 hexoctaèdres symétriques dont toutes les faces sont des plans tritangents.

38. Les points nodaux de la quartique symétrique s'obtiennent en partant de l'équation rendue homogène:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2 + A\rho^4 + 2B\rho^2t^2 + Ct^4 = 0$$

et égalant à zéro les quatre dérivées partielles, ce qui donne:

$$\begin{aligned} x(\ \ x^2 - y^2 - z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ y(- x^2 + y^2 - z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ z(- x^2 - y^2 + z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ t(B\rho^2 + Ct^2) &= 0. \end{aligned}$$

La dernière équation montre que les points cherchés se trouvent soit sur le plan de l'infini, soit sur la sphère $B\rho^2 + C = 0$, orthogonale à la surface. Considérons d'abord les points à distance finie. On peut faire les hypothèses suivantes:

1°. $x = y = z = 0$, d'où $\rho = 0$ et par suite $C = 0$. On a un point isotrope à l'origine. C'est le cas où l'une des sphères directrices est évanouissante.

2°. $x = y = 0$, $z = \rho$. Il vient alors:

$$\begin{aligned} (1 + A)\rho^2 + B &= 0, \\ B\rho^2 + C &= 0 \end{aligned}$$

d'où $B^2 - AC = C$. La surface possède 6 noeuds (sommets d'un octaèdre régulier). En chacun d'eux, le cone des tangentes, étant assujetti

à la symétrie quaternaire, est un cone de révolution. Si l'on a en même temps $A = 0$, d'où $C = B^2$, la surface contient les arêtes d'un octaèdre.

3°. $x = 0$, y et z différents de zéro. On a alors $y^2 = z^2 = \frac{1}{2}\rho^2$, d'où:

$$A\rho^2 + B = 0, \qquad B\rho^2 + C = 0$$

et par suite $B^2 - AC = 0$. La surface possède 12 noeuds, placés au milieu des arêtes d'un cube. Les deux sphères directrices sont confondues en une seule, passant par les 12 noeuds; chacun des plans directeurs touche la surface suivant un cercle. Cette surface ne peut contenir les droites (parallèles aux arêtes de l'octaèdre) joignant deux à deux les points singuliers, que si l'on a $A = 0$. Mais alors, ρ étant supposé fini, il vient $B = 0$ et $C = 0$; la surface se réduit aux plans directeurs. Il ne pouvait en être autrement car chaque plan directeur contient six des droites dont il s'agit.

4°. x, y et z différents de zéro. Il vient:

$$x^2 = y^2 = z^2 = A\rho^2 + B, \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = 3(A\rho^2 + B).$$

On a aussi $B\rho^2 + C = 0$. Par suite:

$$B^2 - AC = \frac{1}{3}C.$$

La surface possède comme noeuds les 8 sommets d'un cube; en chacun de ces noeuds, le cone des tangentes, en vertu de la symétrie ternaire, est de révolution. Pour $A = -1$, d'où $B^2 = -\frac{4}{3}C$, la surface contient les arêtes d'un cube; pour $A = 0$, d'où $B^2 = -\frac{1}{3}C$, elle contient celles de deux tétraèdres; c'est la surface tétraédrique.

Les conditions de réalisation de ces quatre cas montrent que deux d'entre eux ne peuvent se présenter en même temps, à moins qu'on n'ait $B = C = 0$. Mais alors la surface se réduit à un cone, rentrant dans l'une des catégories suivantes:

Pour $A = -1$, cone s'évanouissant autour des 3 axes quaternaires.

Pour $A = \frac{1}{3}$, cone s'évanouissant autour des 4 axes ternaires.

Pour $A = 0$, cone décomposé en six plans (plans directeurs) et possédant 6 arêtes doubles (axes binaires)

Etudions maintenant les points singuliers à l'infini. En faisant $t = 0$, l'on a les 3 équations:

$$x(\ \ x^2 - y^2 - z^2 + A\rho^2) = 0,$$
$$y(-x^2 + y^2 - z^2 + A\rho^2) = 0,$$
$$z(-x^2 - y^2 + z^2 + A\rho^2) = 0,$$

ou bien, en introduisant les cosinus directeurs α, β, γ de la direction aboutissant à un noeud:

$$\alpha(\ \ \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + A) = 0,$$
$$\beta(-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + A) = 0,$$
$$\gamma(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + A) = 0.$$

Ici encore, on peut faire diverses hypothèses:

1°. $\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1,$ d'où $A + 1 = 0.$

A cette hypothèse correspondent 3 points singuliers sur les 3 axes quaternaires.

2°. $\alpha = 0, \quad \beta^2 - \gamma^2 + A = 0, \quad -\beta^2 + \gamma^2 + A = 0,$

d'où $A = 0$, $\beta^2 = \gamma^2$, ce qui donne 6 points singuliers sur les axes binaires.

3°. α, β, γ différents de zéro, d'où $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \frac{1}{3}$ et $A = \frac{1}{3}$, ce qui donne 4 points singuliers sur les axes ternaires.

Voyons comment les divers cas de points singuliers à l'infini peuvent se combiner avec les hypothèses qui donnent des points singuliers à distance finie. Si l'on prend $A = -1$, on peut avoir en outre:

1°. $C = 0$ (point isotrope à l'origine). La surface a 4 noeuds, dont 3 à l'infini.

2°. $B = C = 0$. Cone imaginaire à 3 arêtes doubles.

3°. $B^2 + C = 0$. Les sphères directrices sont confondues. La surface a 12 noeuds à distance finie, sur les axes binaires, et 3 à l'infini. C'est une surface à 15 noeuds. Son équation est:

$$4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2B(x^2 + y^2 + z^2) + B^2 = 0$$

ou bien:

$$N - (\rho^2 - B)^2 = 0.$$

4°. $B^2 = -\frac{4}{3}C$. La surface a 8 noeuds aux sommets d'un cube, et 3 à l'infini soit au total 11 noeuds. C'est la surface circonscrite à un cube.

Passons à l'hypothèse $A = 0$.

1°. $C = 0$ (point isotrope à l'origine). Il y a 7 noeuds dont 6 à l'infini.

2°. $B^2 = C$. Il y a 12 noeuds, dont 6 à l'infini, et la surface est circonscrite à l'octaèdre des 6 noeuds à distance finie.

3°. $B = C = 0$. La surface se décompose en 4 plans.

4°. $B^2 = -\frac{1}{3}C$. La surface a 14 noeuds dont 6 à l'infini; c'est la surface bitétraédrique.

Soit enfin $A = \frac{1}{3}$.

1°. $C = 0$. 5 noeuds, dont 4 à l'infini.

2°. $B^2 = \frac{4}{3}C$. 10 noeuds, dont 4 à l'infini.

3°. $B^2 = \frac{1}{3}C$. 16 noeuds, dont 4 à l'infini. En posant

$$3B = -2b^2,$$

l'équation de cette surface, qui présente le nombre maximum de noeuds, peut s'écrire:

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 - 2b^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2b^4 = 0.$$

Les noeuds a distance finie sont sur la sphère qui a pour rayon $b\sqrt{2}$.

4°. $B = C = 0$. Cone évanouissant.

En résumé, laissant de côté les cones à arètes doubles, on voit qu'on peut avoir:

1- 3- 4- 6- 8- 10- 11- 12- 14- 15- 16 noeuds,

dont

1- 6- 8- 12 à distance finie

et

3-4-6 à distance infinie.

On sait que si une surface du 4ème degré a 16 noeuds, le cone circonscrit à la surface, à partir de l'un des noeuds, se décompose en 6 plans, que, si elle a 15 noeuds, le même cone se décompose en 4 plans et un cone du second ordre; que, si elle a 14 noeuds, il se décompose en 3 plans et un cone cubique, ou 2 plans et 2 cones quadriques. Dans ce dernier cas, il y a 8 noeuds, donnant lieu au premier mode de décomposition, et 6, au second. Il en résulte évidemment que, pour la quartique symétrique à 14 noeuds (bitétraèdrique) le deuxième mode de décomposition correspond aux 6 noeuds à l'infini (c'est à dire aux directions des axes binaires). Les deux plans qui font alors partie du cylindre circonscrit sont deux faces du cube inscrit, parallèles à l'axe binaire considéré, et tangentes en tous les points de deux droites perpendiculaires à cet axe binaire. Les deux cones du second ordre sont remplacés par deux cylindres infiniment déliés (droites de la surface), parallèles à l'axe binaire.

39. La recherche des noeuds peut également s'effectuer en considérant la quadrique de révolution dont il a été question au n° **32**. Si $\varphi(x^2, y^2, z^2, t^2) = 0$ est la quartique, et si l'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, etc., l'équation prend la forme $\Phi(X, Y, Z, T) = 0$ et représente la quadrique. On a identiquement:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \text{ etc.}$$

Les point nodaux de la quartique correspondent donc aux points de la quadrique qui vérifient à la fois les 4 équations:

$$\sqrt{X}\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \sqrt{Y}\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sqrt{Z}\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \sqrt{T}\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0.$$

Les quatre dérivées qui figurent ici ne peuvent s'annuler simultanément que si la quadrique possède un point singulier, et se réduit par conséquent à un cone. Le sommet de ce cone étant nécessairement sur la droite $X = Y = Z$, les points singuliers correspondants de la quartique sont sur les axes ternaires, et au nombre de 8. Dans tous les cas,

les points nodaux à distance finie sont sur la sphère correspondant au plan $\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0$, c'est à dire sur la sphère $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. On peut faire les hypothèses suivantes:

$$1°. \qquad X = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0.$$

La quadrique touche le plan YoZ, et par conséquent les 3 plans de coordonnées. Il est évident, par raison de symétrie, que le contact a lieu sur les bissectrices des axes, correspondant aux axes binaires de la quartique, ce qui donne 12 noeuds de cette dernière.

$$2°. \qquad X = Y = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0.$$

La quadrique touche l'axe oZ, et par conséquent les 3 axes de coordonnées, correspondant aux axes quaternaires de la surface, ce qui donne 6 noeuds de cette dernière.

3°. $X = Y = Z = 0$. La quadrique passe par l'origine, ce qui donne un point isotrope de la quartique.

Les noeuds à l'infini se produisent quand la quadrique touche à l'infini soit les plans, soit les axes de coordonnées. Ils se produisent aussi quand la quadrique a un point à l'infini dans la direction de son axe; ce qui réduit son cone asymptotique à cet axe. La quadrique est alors un paraboloïde. C'est ainsi que la surface à 16 noeuds dérive d'un paraboloïde, de révolution autour de la droite $X = Y = Z$, tangent aux trois plans de coordonnées. La surface à 15 noeuds correspond à une quadrique touchant à l'infini les 3 axes de coordonnées et à distance finie les trois plans de coordonnées. Chacun de ces plans rencontre la quadrique suivant deux droites parallèles aux deux axes contenus dans son plan; c'est un hyperboloïde rectangle, engendré par la révolution d'une arête d'un cube autour d'une diagonale.

Les surfaces qui possèdent 8 noeuds à distance finie sur les axes ternaires, c'est à dire les surfaces à 8, 11 et 14 noeuds, jouissent d'une propriété remarquable. Chacune d'elles dérive d'un cone droit; par conséquent les deux systèmes d'ellipsimbres correspondant aux génératrices rectilignes sont confondus et, le long de chaque ellipsimbre, la quartique

est touchée par la quadrique correspondant au plan tangent du cone. Cette quadrique passe évidemment par les 8 noeuds dérivant du sommet du cone; en chacun de ces noeuds, elle fait, comme on peut le constater facilement, un angle constant avec l'axe ternaire. De plus, l'ellipsimbre de contact se trouve sur un cone du second ordre, correspondant au plan méridien du cone de révolution, et passant conséquemment par les axes ternaires. Ainsi:

Toute quartiqué symétrique possédant 8 *noeuds à distance finie sur les axes ternaires est rencontrée suivant deux ellipsimbres par les cones du second ordre passant par ces axes, et touchée, le long de chacune de ces courbes par une quadrique contenant les* 8 *noeuds et coupant les axes ternaires sous un angle constant.*

On voit en même temps que la quartique symétrique dont il s'agit est l'enveloppe de la quadrique:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = Const.$$

lorsque λ, μ, ν, varient de telle façon que $\lambda + \mu + \nu$ et $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ aient des valeurs constantes.

40. La classe d'une quartique est en général égale à 36, mais chaque noeud l'abaisse de 2 unités. La quartique à 16 noeuds est donc de quatrième classe. Par conséquent, sa réciproque relative à une sphère centrale est du 4ème ordre, et comme cette réciproque jouit de la même symétrie, son équation doit rentrer dans le type général:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0.$$

Pour déterminer les constantes, remarquons qu'à chaque noeud à distance finie de la première surface (placé, comme nous l'avons vu, sur un axe binaire) correspond un plan perpendiculaire à l'axe binaire, et touchant la réciproque suivant une conique. Cherchons donc à quelle condition un plan tel que $z = y + p$ peut toucher une quartique symétrique suivant une conique. Cette conique étant nécessairement symétrique par rapport à l'axe des x, ses équations peuvent s'écrire:

$$z = y + p,$$

$$x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

et, si l'on coupe la surface par le plan $z = y + p$, l'équation de la projection doit se réduire à $(x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma)^2 = 0$. En partant de cette remarque, on trouve sans peine:

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{2}{3}p^2, \qquad C = \frac{4}{3}p^4,$$

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -p, \qquad \gamma = -p^2.$$

p reste seul arbitraire. L'équation de la surface cherchée se réduit ainsi à:

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 - 2p^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2p^4 = 0.$$

Il résulte de là que:

La réciproque d'une quartique symétrique à 16 noeuds est une surface de même nature.

Ceci nous permet de compléter les propriétés de la surface à 16 noeuds. Elle est touchée suivant une conique par chacun des 12 plans tels que $z = y + p$, et les équations de la conique de contact sont:

$$z = y + p,$$
$$x^2 - y^2 - py - p^2 = 0.$$

C'est une hyperbole rencontrant le plan zoy en deux points imaginaires, et chacun des plans zox, xoy en des points réels qui sont bien, comme cela est nécessaire, des noeuds de la surface (par exemple, le point $z = 0$, $x = y = p$). Chacun des plans touchant la surface suivant une conique passe par 4 noeuds, et est perpendiculaire à un axe binaire. La surface, n'ayant que 16 noeuds, ne possède que 16 plans bitangents distincts: à savoir les 4 plans directeurs et les 12 plans qui la touchent suivant des coniques. Si l'on considère les sections perpendiculaires à l'axe quaternaire oz, on remarque que, pour $z = 0$, il n'y a pas d'autre points réels que les 4 noeuds situés dans le plan sécant, et que, pour $z = \pm p$, la section se décompose en deux coniques. On en conclut: 1° que le cylindre circonscrit parallèlement à un axe quaternaire se réduit à 4 plans; 2° qu'il y a sur chaque axe quaternaire deux points dont chacun est le sommet de deux cones de second ordre circonscrits à la surface.

Aux quatre cercles directeurs correspondent 4 cylindres de révolution circonscrits parallèlement aux axes ternaires. Observons enfin que la réciprocité dont jouit cette surface permet de déduire des divers modes de génération indiqués précédemment une série de modes nouveaux. Ainsi, aux diverses séries d'ellipsimbres qu'on peut tracer sur la surface correspondent diverses séries de développables, circonscrites à la fois à la surface et à un couple de quadriques; etc.

La surface réciproque de la quartique symétrique à 14 noeuds (ou bitétraédrique) est une surface symétrique du 8ème ordre, qui possède un mode de génération remarquable. La bitétraédrique étant l'enveloppe d'une série de quadriques qui passent par 8 points fixes, et dont chacune la touche suivant une ellipsimbre (intersection de deux quadriques infiniment voisines), on en conclut que la surface réciproque est l'enveloppe d'une série de quadriques qui touchent 8 plans fixes, parallèles aux faces de l'octaèdre. Le lieu des points de contact des quadriques avec chacun des plans fixes est une circonférence ayant son centre sur l'axe ternaire perpendiculaire. La surface réciproque possède 12 droites, correspondant à celles de la surface bitétraédrique et formant comme celles-ci les diagonales des faces d'un cube.

41. Parmi les cas particuliers de quartiques symétriques, il convient de citer celui où le coefficient B est égal à zéro. Alors la somme des carrés des rayons des sphères directrices est nulle, et celles-ci se coupent orthogonalement. Le cone asymptotique n'a pas de points de rencontre à distance finie avec la surface. La quadrique correspondant à ce genre de surfaces a évidemment son centre à l'origine. Considérons spécialement la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

qui dérive de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, et qu'on peut appeler pour cette raison surface pseudosphérique. En mettant son équation sous la forme ordinaire, on trouve:

$$N + (\rho^2 - \sqrt{2})(\rho^2 + \sqrt{2}) = 0.$$

La surface pseudosphérique est l'enveloppe de la quadrique

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

lorsque $A^2 + B^2 + C^2$ est constant. En posant $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, et suivant le procédé indiqué au n° 23, pour le cas des surfaces tétraédrales symétriques simples (qui comprend celui de la surface pseudosphérique), on reconnait que la détermination des lignes asymptotiques revient à l'intégration de l'équation $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$. Le problème se réduit donc à trouver les génératrices rectilignes de la sphère.

La surface pseudosphérique contient les 16 droites suivant lesquelles les 4 plans $z^4 - 1 = 0$ coupent les 4 plans $x^4 + y^4 = 0$. Par permutation des variables, on obtient 48 droites de la surface, toutes imaginaires, au sujet desquelles il y a lieu de se reporter à la remarque précédemment faite (n° 7).

La réciproque de la surface pseudosphérique par rapport à une sphère centrale est:

$$x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} + z^{\frac{4}{3}} = Const.,$$

surface du 36ème ordre, possédant 48 droites triples

Sa transformée par rayons vecteurs réciproques issus du centre a une équation de la forme:

$$x^4 + y^4 + z^4 - k(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 0.$$

L'équation, plus générale:

$$(1) \qquad x^4 + y^4 + z^4 - k(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^4 = 0$$

est homogène par rapport aux 4 quantités x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2 + R^2$, qui peuvent être regardées comme les puissances du point (x, y, z) relatives à 4 sphères, dont 3 infinies et une imaginaire. La sphère

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

est orthogonale à ces quatre sphères, et par conséquent la surface (1), en vertu d'une remarque de M. Darboux, est anallagmatique par rapport à la sphère (2). C'est une surface anallagmatique douée de toutes les propriétés établies précédemment pour les surfaces binaires à symétrie cuboctaédrique.

42. Parmi les surfaces cuboctaédriques du 6ème ordre, mentionnons seulement la suivante, à cause de la simplicité de son mode de génération.

Un plan mobile, tangent à une sphère fixe de rayon $\frac{a}{3}$, coupe trois diamètres rectangulaires de cette sphère en trois points A, B, C. Le lieu du centre de gravité du triangle ABC est la surface:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2}$$

ou

$$a^2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = x^2y^2z^2.$$

C'est une surface tétraédrale symétrique simple, dont on sait par suite trouver les lignes asymptotiques. La droite qui joint l'origine à un point de la surface est *inverse* de la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent. La même surface peut être engendrée par le foyer d'un paraboloïde de révolution, qui se déplace en restant tangent aux trois plans de coordonnées.

Quatrième partie. Surfaces du type icosidodécaédrique.

43. Le type icosidodécaédrique est caractérisé par 15 plans de symétrie, contenant chacun deux arêtes parallèles du dodécaèdre. Ces quinze plans forment cinq systèmes de trièdres trirectangles. Leur existence entraîne celle d'un centre de symétrie, de 6 axes quinaires (perpendiculaires aux faces et passant chacun par les centres de deux faces parallèles) — de 10 axes ternaires (les diagonales du dodécaèdre) — de 15 axes binaires (les perpendiculaires aux plans de symétrie, joignant chacune les milieux de deux faces parallèles. Les faces de l'icosaèdre conjugué sont perpendiculaires aux axes ternaires, c'est à dire aux diagonales du dodécaèdre.

Prenons comme plans de coordonnées trois plans de symétrie rectangulaires, et commençons par chercher les équations qui déterminent les principales données du système. Pour fixer les idées, nous supposons qu'il s'agisse d'étudier le dodécaèdre régulier. Chaque axe binaire rencontre à angle droit deux arêtes contenues dans un même plan de sy-

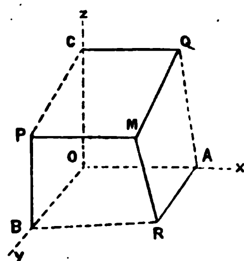


Fig. 6.

métrie. ox, par exemple (fig. 6) rencontre une arête AR que nous pouvons supposer située dans le plan xoy. En prenant sur oy une longueur $oB = oA = a$, nous avons en B une arête BP, normale à oy, et la symétrie ternaire autour de la droite $x = y = z$ exige que cette arête soit dans le plan zoy. De même à la distance $oC = a$, l'axe oz est rencontré par une arête CQ située dans le plan xoz.

Par l'arête AR passent deux faces du dodécaèdre. Soit $ARMQ$ la face contenue dans le trièdre positif, et soit $x + \lambda z = 0$ l'équation du plan central parallèle à cette face. On a de même les deux plans $y + \lambda x = 0$, $z + \lambda y = 0$, correspondant aux deux autres faces $BPMR$, $CQMP$, déduites de la première par la symétrie ternaire. La droite MP est une arête, et le dièdre des deux faces qui se coupent suivant MP est double de celui que forme la face $MQAR$ avec le plan xoy. Cette condition détermine λ. En effet, la normale à la face $BPMR$, dirigée extérieurement au dodécaèdre, a pour cosinus directeurs:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad 0.$$

De même la normale extérieure à $CQMP$ a pour cosinus:

$$0, \qquad \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Le cosinus de l'angle dièdre MP, supplémentaire de l'angle des normales extérieures, est donc $-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Cet angle est double de l'angle i d'inclinaison d'une face sur le plan de symétrie adjacent. D'ailleurs $\operatorname{tg} i = \frac{1}{\lambda}$. On a donc:

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \cos 2i = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$$

d'où:

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Il faut évidemment prendre pour λ la racine positive de cette équation:

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Si μ est l'autre racine, on a:

$$\lambda\mu = -1, \qquad \lambda + \mu = -1, \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 + \mu^2 = 3.$$

Chaque plan de symétrie est perpendiculaire à une arête. L'arête MP étant parallèle à l'intersection des deux plans $y + \lambda x = 0$, $z + \lambda y = 0$, le plan de symétrie qui lui est perpendiculaire a pour équation:

$$\frac{1}{\lambda} x - y + \lambda z = 0$$

ou bien:

$$\mu x + y - \lambda z = 0.$$

Par permutation, on trouve alors que les 15 plans de symétrie sont:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$x \pm \lambda y \pm \mu z = 0,$$

$$\pm \mu x + y \pm \lambda z = 0,$$

$$\pm \lambda x \pm \mu y + z = 0.$$

Les plans centraux parallèles aux faces sont au nombre de 6, ayant pour équations:

$$y \pm \lambda x = 0,$$

$$z \pm \lambda y = 0,$$

$$x \pm \lambda z = 0.$$

Ces six plans, perpendiculaires aux axes quinaires, peuvent, d'une manière abrégée, être appelés *plans quinaires.* Les plans centraux perpendiculaires aux rayons passant par les sommets, c'est à dire aux axes ternaires, sont au nombre de dix et peuvent être appelés *plans ternaires.* Pour les déterminer, remarquons que le sommet P (fig. 6) est à l'intersection des

trois plans $x = 0$, $y = a$, $z - a + \lambda y = 0$. Le plan ternaire correspondant est donc $y = -(1 - \lambda)z$, ou bien $y = -\lambda^2 z$. On a ainsi un premier groupe de six plans:

$$y \pm \lambda^2 z = 0,$$

$$z \pm \lambda^2 x = 0,$$

$$x \pm \lambda^2 y = 0.$$

Le sommet M est sur la droite $x = y = z$, perpendiculaire au plan $x + y + z = 0$, et l'on en déduit un second groupe de quatre plans:

$$x \pm y \pm z = 0.$$

44. Nous pouvons prendre comme éléments non sphériques les deux produits:

$$M = (z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2),$$

$$N = (y^2 - \lambda^4 z^2)(z^2 - \lambda^4 x^2)(x^2 - \lambda^4 y^2)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2)$$

qui représentent, à des facteurs numériques près, les produits des distances d'un point aux six plans quinaires et aux dix plans ternaires. L'équation générale des surfaces icosidodécaédriques est donc:

$$\varphi\Big((y^2 - \lambda^4 z^2)(z^2 - \lambda^4 x^2)(x^2 - \lambda^4 y^2)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2),$$
$$(y^2 - \lambda^2 x^2)(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2),\ (x^2 + y^2 + z^2)\Big) = 0$$

λ étant égal à $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et φ désignant une fonction arbitraire.

Le produit des degrés des éléments L, M, N est égal à 120, ce qui est précisément le nombre minimum de points formant un groupe doué de la symétrie icosidodécaédrique. Les éléments M et N sont donc bien les éléments simples dont nous avons besoin. On remarque en même temps que, conformément à la théorie générale exposée au n° 2, la somme de leurs degrés, diminuée d'une unité est égale à 15, c'est à dire au nombre des plans de symétrie.

Pour exprimer effectivement x, y, z en fonction des éléments L, M, N, on peut poser:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = v,$$
$$x^2y^2z^2 = w,$$
$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = p,$$
$$x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 = q,$$

d'où $p + q = Lv - 3w$. En développant les valeurs de M et N, il vient:

$$M = w(1 - \lambda^6) - \lambda^2 q + \lambda^4 q,$$
$$N = (L^2 - 4v)[w(1 - \lambda^{12}) - \lambda^4 p + \lambda^8 q],$$

d'où:

$$\lambda^2(\lambda^6 - 1)q = M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(\lambda^{12} + \lambda^6 - 2),$$

$$\lambda^4(\lambda^6 - 1)p = \lambda^6 M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(2\lambda^{12} - \lambda^6 - 1).$$

Tirons de là $p + q$ et pq. D'autre part, nous avons:

$$pq = \Sigma x^6y^6 + w\Sigma x^6 + 3w^2 = v^3 - 6Lvw + qw^2 + wL^3.$$

Egalant les deux valeurs de pq, on obtient:

$$\lambda^6(\lambda^6 - 1)^2(v^3 - 6Lvw + qw^2 + wL^3)$$
$$= \left[M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(\lambda^{12} + \lambda^6 - 2)\right]\left[\lambda^6 M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(2\lambda^{12} - \lambda^6 - 1)\right].$$

De même, en égalant les deux valeurs de $p + q$, on trouve:

$$\lambda^2(\lambda^6 - 1)^2(Lv - 3w)$$
$$= M(1 + \lambda^4) + \frac{N}{L^2 - 4v}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{w}{\lambda^2}(1 + 2\lambda^2 + \lambda^6 - \lambda^8 - 2\lambda^{12} - \lambda^{14}).$$

Cette dernière équation, linéaire en w, donne une valeur de w qui, portée dans l'équation précédente, conduit à une équation du 5ème degré en v. On aura donc 5 valeurs de v, c'est à dire de $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$, correspondant aux 5 trièdres trirectangles formés par les plans de symétrie.

v et w étant connus, et L étant supposé donné, les inconnues x^2, y^2, z se présentent comme racines d'une équation du 3ème degré. Mais ces racines ne peuvent être rangées arbitrairement. Quand on a, par exemple, choisi l'une d'elles pour valeur de x^2, l'équation $x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = p$, dans laquelle p est connu, et qui est dissymétrique par rapport à y^2 et z^2, empêche la permutation de ces deux coordonnées. L'équation du 3e degré ne donne donc que trois groupes de valeurs de x^2, y^2, z^2, correspondant à 24 groupes de valeurs de x, y, z. Les 5 racines de l'équation en v conduisent donc à un ensemble de $5 \times 24 = 120$ points, comme on devait le prévoir. En résumé, le problème dépend d'une équation du 5ème degré.

45. Le degré minimum de la surface icosidodécaédrique non décomposable en sphères est évidemment le sixième, et dans ce cas, l'équation peut s'écrire:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A\rho^6 + 3B\rho^4 + 3C\rho^2 + D = 0.$$

A, B, C, D étant quatre constantes arbitraires, et ρ, la distance à l'origine. Pour abréger, nous appellerons cette surface *sextique symétrique.* Son intersection par une sphère centrale est une sphérosymétrique du 12ème ordre. Son intersection par un plan perpendiculaire à un axe quinaire est une sextique plane ayant 5 axes de symétrie. Par conséquent, la surface peut être engendrée au moyen d'une sphérosymétrique du 12ème ordre s'appuyant sur une sextique plane qui a 5 axes de symétrie.

La sextique symétrique, étant une surface binaire, possède trois sphères directrices, dont les rayons R_1, R_2, R_3 vérifient l'équation en ρ:

$$A\rho^6 + 3B\rho^4 + 3C\rho^2 + D = 0.$$

Si l'on désigne par plans directeurs les 6 plans quinaires, on peut dire que:

La sextique symétrique est le lieu des points dont le produit des distances à 6 plans directeurs, parallèles aux faces d'un dodécaèdre régulier, est proportionnel au produit des puissances par rapport à 3 sphères directrices, concentriques au dodécaèdre.

Chacun des plans directeurs coupe la surface suivant 3 cercles concentriques, ce qui fait connaître 18 cercles de la surface. D'après la

théorie générale la surface coupe orthogonalement deux sphères qui font connaître deux lignes de courbure sphérosymétrique, et dont le rayon dépend uniquement de celui des sphères directrices.

Si l'on met l'équation sous la forme:

$$(1)\quad (z^2-\lambda^2y^2)(x^2-\lambda^2z^2)(y^2-\lambda^2x^2)+A(\rho^2-R_1^2)(\rho^2-R_2^2)(\rho^2-R_3^2)^2=0,$$

on voit qu'on obtient 8 points de la surface en prenant les points d'intersection des trois quadriques, à sections cycliques centrales invariables:

$$(2)\quad \begin{aligned} z^2-\lambda^2y^2&=t(\rho^2-R_1^2),\\ x^2-\lambda^2z^2&=u(\rho^2-R_2^2),\\ y^2-\lambda^2x^2&=v(\rho^2-R_3^2),\end{aligned}$$

t, u, v étant trois paramètres liés par la seule condition:

$$tuv+A=0.$$

Les 8 points sont sur la sphère:

$$\rho^2(1-\lambda^2)=(t+u+v)\rho^2-(tR_1^2+uR_2^2+vR_3^2).$$

Lorsqu'on a à la fois:

$$\begin{aligned} tuv&=-A,\\ t+u+v&=1-\lambda^2=\lambda,\\ tR_1^2+uR_2^2+vR_3^2&=0,\end{aligned}$$

les 3 quadriques ont en commun une ellipsimbre, qui appartient par suite à la surface. On peut satisfaire de trois manières à ces conditions, et on trouve ainsi, en chaque point, 3 ellipsimbres symétriques par rapport aux plans de coordonnées. Comme on peut d'ailleurs, de 6 manières différentes, combiner les facteurs de l'équation (1) sous une forme telle que (2), on en conclut l'existence de 18 ellipsimbres situées sur la surface, et ayant pour plans de symétrie les trois plans de coordonnées. Chaque système de plans de symétrie trirectangulaires correspond donc à 18 ellipsimbres; comme il y en a 5, on parvient à un total de 90 ellipsimbres passant par chaque point de la surface. On voit en même

temps que la sextique symétrique peut être engendrée au moyen d'une sphérosymétrique du $12^{\text{ème}}$ ordre qui s'appuie sur une ellipsimbre.

46. Si l'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, on est amené à considérer la sextique symétrique comme dérivant d'une surface cubique, à chaque point de laquelle correspondent 8 points de la sextique. A chaque droite de la cubique correspond une ellipsimbre de la sextique, et l'on a ainsi 27 ellipsimbres. Celles-ci se composent: 1° des 9 couples de cercles interceptés par les couples de plans directeurs symétriques relativement aux plans de coordonnées; 2° des 18 ellipsimbres, symétriques relativement aux mêmes plans, déjà rencontrées à l'article précédent. A chaque plan tritangent de la cubique correspond une quadrique coupant la surface suivant 3 ellipsimbres et touchant cette surface en 24 points. Il y a donc 45 quadriques jouissant de cette propriété et possédant comme plans de symétrie trois plans de symétrie rectangulaires de la sextique. Parmi ces quadriques, se trouvent comptées les 3 sphères directrices, ainsi que 3 couples de plans directeurs; il reste donc 39 quadriques proprement dites. Les 5 groupes de plans de symétrie trirectangulaires entraînent par suite l'existence de $5 \times 39 = 195$ quadriques, coupant chacune la sextique suivant 3 ellipsimbres, et la touchant en 24 points. Deux ellipsimbres d'un même groupe, c'est-à-dire ayant les mêmes plans de symétrie, se rencontrent ou ne se rencontrent pas suivant que les droites correspondantes de la cubique sont ou non dans le même plan. On peut ainsi étendre à la sextique les théorèmes concernant la disposition des droites d'une cubique. Par exemple:

Par chaque ellipsimbre passent 5 *quadriques coupant chacune la surface suivant deux autres ellipsimbres du même groupe;*

Chaque ellipsimbre est rencontrée par dix autres du même groupe; savoir 3 *couples de cercles et* 6 *ellipsimbres proprement dites.*

On pourrait aussi considérer les ellipsimbres comme disposées en doubles-six d'après l'arrangement imaginé par Schläfli; mais il paraît inutile d'insister davantage sur ce sujet.

47. Si l'on pose:

$$Z - \lambda^2 Y = U + V,$$

$$X - \lambda^2 Z = V + T,$$

$$Y - \lambda^2 X = T + U,$$

et

$$X + Y + Z = \omega,$$

d'où:

$$\omega(1 - \lambda^2) = \lambda\omega = 2(T + U + V),$$

l'équation de la surface cubique considérée à l'article précédent peut s'écrire:

$$(U + V)(V + T)(T + U) + A\omega^3 + 3B\omega^2 + 3C\omega + D = 0,$$

ou bien, en modifiant les constantes:

$$T^3 + U^3 + V^3 = A'\omega^3 + 3B'\omega^2 + 3C'\omega + D'.$$

On peut en outre déterminer 4 constantes a, b, a', b', telles qu'on ait identiquement:

$$A'\omega^3 + 3B'\omega^2 + 3C'\omega + D' = (a\omega + b)^3 + (a'\omega + b')^3.$$

Posant enfin

$$a\,\omega + b = -\Phi,$$

$$a'\omega + b' = -\Psi,$$

l'équation de la surface cubique se trouve mise sous la forme canonique:

$$T^3 + U^3 + V^3 + \Phi^3 + \Psi^3 = 0.$$

Les conditions imposées à a, b, a', b' sont:

$$a^3 + a'^3 = A',$$

$$a^2 b + a'^2 b' = B',$$

$$ab^2 + a'b'^2 = C',$$

$$b^3 + b'^3 = D'.$$

Pour résoudre ce système, on peut supposer qu'on ait d'abord fait disparaître D' par le changement de ω en $\omega + s$, s étant une racine de:

$$A's^3 + 3B's^2 + 3C's + D' = 0.$$

D' étant ainsi annulé, l'on a: $b' = -b$, d'où:

$$(a^2 - a'^2)b = B',$$

$$(a + a')b^2 = C',$$

et par suite:

$$\frac{(a^2 - a'^2)^2}{a + a'} = \frac{B'^2}{C'}.$$

Soit $a + a' = u$, $a - a' = v$, il vient:

$$uv^2 = \frac{B'^2}{C'}.$$

D'ailleurs:

$$4(a^3 + a'^3) = u^3 + 3uv^2 = 4A',$$

d'où:

$$u = \sqrt[3]{4A' - \frac{3B'^2}{C'}}, \qquad v = \sqrt{\frac{B'^2}{C'u}}.$$

La réduction n'est réellement possible par cette méthode que si $C'u$ est positif, ou bien:

$$4A'C' - 3B'^2 > 0.$$

Revenant à la sextique, on voit que son équation peut s'écrire, dans les mêmes conditions:

$$T^3 + U^3 + V^3 + \Phi^3 + \Psi^3 = 0,$$

$\Phi = 0$ et $\Psi = 0$ étant deux sphères centrales, et $T = 0$, $U = 0$, $V = 0$ étant les trois cones:

$$\lambda x^2 + (1 + \lambda^2)(y^2 - z^2) = 0,$$

$$\lambda y^2 + (1 + \lambda^2)(z^2 - x^2) = 0,$$

$$\lambda z^2 + (1 + \lambda^2)(x^2 - y^2) = 0.$$

48. Cherchons maintenant les droites réelles qui peuvent appartenir à la sextique symétrique. D'après ce qui a été dit précédemment, ces droites sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et parallèles par suite aux axes binaires. Réciproquement, si une droite est perpendiculaire à un plan de symétrie, on peut déterminer les quatre coefficients

de la sextique symétrique de façon qu'elle rencontre la droite en quatre points dissymétriques, et par conséquent en 8 points. La droite appartient alors à la surface, ainsi que le groupe de 60 droites dont elle fait partie.

Si la sextique symétrique contient des perpendiculaires aux plans de symétrie, son cone asymptotique passe par les axes binaires, et en particulier par les axes de coordonnées. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que le coefficient A soit nul, c'est à dire qu'une des sphères directrices soit infinie. Prenons donc la surface:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + 3B(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3C(x^2 + y^2 + z^2) + D = 0,$$

et écrivons qu'elle contient la droite $x = \alpha$, $y = \beta$. Nous trouvons:

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = \frac{3B}{\lambda^2},$$

$$\lambda^2\beta^2(2 + \lambda^2) + \alpha^2(1 + 2\lambda^2) = -\frac{C\lambda^2}{B},$$

$$3B\alpha^2\beta^2 + 3B(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 3C(\alpha^2 + \beta^2) + D = 0.$$

L'élimination de α^2 et β^2 conduit à une équation de condition compliquée, mais linéaire en D. Il en résulte que parmi les sextiques formant une famille asymptotique, c'est à dire n'ayant de points communs qu'à l'infini, il y en a une, et une seule, qui contient 60 droites à distance finie. Si les deux sphères directrices sont données, on connait les rapports $\frac{C}{B}$ et $\frac{D}{B}$. En posant $C = uB$, $D = vB$, on a, pour déterminer B, une équation du 3ème degré, sans terme indépendant. Laissant de côté la racine nulle, qui réduit la surface aux plans directeurs, on voit que *parmi les sextiques qui possèdent deux sphères directrices données (la troisième étant rejetée à l'infini), il y en a deux qui contiennent* 60 *droites.* Enfin, si l'on veut déterminer une sextique passant par une droite donnée, perpendiculaire à un plan de symétrie, on obtient, au moyen des équations précédemment écrites, des valeurs, toujours finies et déterminées, des coefficients B, C, D. D'après cela, *il y a toujours une sextique symétrique, et une seule, passant par une droite perpendiculaire à un plan de symétrie.* La disposition des

Fig. 7.

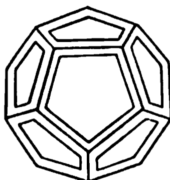
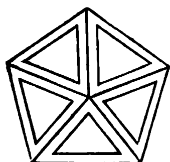


Fig. 8.



60 droites est bien facile à imaginer, on peut les regarder comme placées sur les faces d'un dodécaèdre régulier, parallèlement aux arêtes (fig. 7). On peut également les disposer sur les faces d'un icosaèdre (fig. 8).

49. Proposons nous de déterminer une surface contenant les arêtes d'un dodécaèdre régulier. Soient $x = 0$, $y = \beta$ les équations d'une de ces arêtes. En faisant $\alpha = 0$ dans les équations générales, on trouve, pour la surface cherchée:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) \\ + \lambda^2 \beta^2 (\rho^2 - \beta^2)[\rho^2 - (\lambda^2 + 1)\beta^2] = 0.$$

Cette surface possède 30 droites à distance finie, et 6 à l'infini. Le long de chaque droite à distance finie, le plan tangent est fixe (perpendiculaire à un plan de symétrie). Il y a 20 noeuds à distance finie (sommets du dodécaèdre) et 15 à l'infini correspondant aux directions des arêtes du dodécaèdre. En chaque sommet du dodécaèdre, le cone des tangentes, possédant la symétrie ternaire, est de révolution. L'une des sphères directrices ($\rho^2 = \beta^2$) est tangente aux arêtes du dodécaèdre. L'autre sphère directrice passe par le point de rencontre de l'arête $x = 0$, $y = \beta$ avec le plan directeur $z + \lambda y = 0$.

On peut former de même l'équation d'une surface contenant les arêtes d'un icosaèdre. Une arête de ce genre a pour équations $x = \alpha$, $y = 0$. Il suffit donc de faire $\beta = 0$ dans les équations générales, et l'on obtient:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) - \lambda^2 \alpha^2 (\rho^2 - \alpha^2)[\lambda^2 \rho^2 - \alpha^2 (1 + \lambda^2)] = 0.$$

Cette surface possède, comme la précédente, 30 droites à distance finie, dans les plans de symétrie, et 6 à l'infini. Elle a 12 noeuds à distance finie (sommets de l'icosaèdre), et 15 à l'infini, dans la direction des arêtes. En chaque noeud à distance finie, le cone des tangentes, possédant la symétrie quinaire, est de révolution. L'une des sphères directrices ($\rho^2 = \alpha^2$) est tangente aux arêtes. L'autre sphère passe par le point de rencontre de l'arête $x = \alpha$, $y = 0$ avec le plan directeur $\lambda z + x = 0$.

Une sextique symétrique proprement dite ne peut contenir les côtés des pentagones réguliers convexes placés sur les faces du dodécaèdre régulier de telle façon que leurs sommets coïncident avec les milieux des arêtes du dodécaèdre; car, en pareil cas, chaque plan directeur rencontrerait la surface suivant dix droites. Mais il existe une sextique contenant les côtés des pentagones étoilés correspondant aux pentagones convexes formés par les faces du même polyèdre. Il suffit, pour obtenir son équation, de faire $\alpha = \beta$ dans les formules générales, et il vient:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + \lambda^3\alpha^2(\rho^4 - 7\alpha^2\rho^2 + 13\alpha^4) = 0.$$

50. Pour étudier les points nodaux de la sextique symétrique, posons:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = u,$$

$$x^2 - \lambda^2 z^2 = v,$$

$$y^2 - \lambda^2 x^2 = w,$$

d'où:

$$\rho^2(1 - \lambda^2) = \lambda\rho^2 = u + v + w.$$

L'équation, rendue homogène:

$$f(u, v, w, t) = uvw + A\rho^6 + 3B\rho^4 t^2 + 3C\rho^2 t^4 + Dt^6 = 0$$

donne:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ux(w - \lambda^2 v) + 6x(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2vy(u - \lambda^2 w) + 6y(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2wz(v - \lambda^2 u) + 6z(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 6t(B\rho^4 + 2C\rho^2 t^2 + Dt^4).$$

Pour un point nodal, ces quatre dérivées s'annulent en même temps. Cherchons d'abord les noeuds à distance finie. t étant différent de zéro, on a en faisant $t = 1$:

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0$$

ce qui exprime que tous les points nodaux à distance finie sont, conformément à la théorie générale, sur les deux sphères centrales orthogonales à la surface, autrement dit sur les deux lignes de courbure sphériques. Ceci posé, on peut faire les hypothèses suivantes:

1ère hypothèse. $x = y = z = 0$, d'où $\rho = 0$, ce qui exige que D soit nul. On a alors un point isotrope à l'origine.

2ème hypothèse. $x = y = 0$, $z \gtrless 0$; alors $w = 0$. On a donc à la fois:

$$A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$
$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0,$$

d'où:

$$4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = (BC - AD)^2.$$

C'est la condition pour que deux sphères directrices coïncident. D'après cela:

Chaque fois que deux des sphères directrices sont confondues, la surface possède 30 *noeuds, placés à la rencontre de cette sphère avec les axes binaires.*

Ces 30 noeuds sont les milieux des arêtes d'un dodécaèdre régulier; la surface ne peut, sans se réduire aux plans directeurs, contenir les droites qui joignent ces points deux à deux.

Quand les trois sphères directrices sont confondues, ce qui a lieu pour $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$, chaque axe binaire rencontre la surface en 6 points, confondus trois par trois en deux noeuds. Cet axe est donc, en chaque noeud, une génératrice du cone des tangentes, et la symétrie binaire exige par suite que le cone des tangentes se décompose en deux plans passant par l'axe binaire. Chaque noeud est alors biplanaire, et il est facile de trouver ses deux plans tangents. Car l'équation de la surface peut s'écrire:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A(x^2 + y^2 + z^2 - h^2)^3 = 0.$$

Faisant $z = h$, pour avoir la section par un plan tangent à la sphère directrice en l'un des noeuds, il vient:

$$(h^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 h^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A(x^2 + y^2)^3 = 0$$

et les tangentes à la section en son point double sont données par

$y^2 - \lambda^2 x^2 = 0$; ce sont les traces des plans directeurs passant par ce point. En résumé:

Quand les trois sphères directrices sont confondues, chaque axe binaire rencontre la surface en deux noeuds biplanaires, et les deux plans tangents en chaque noeud sont les plans directeurs qui se coupent suivant l'axe binaire.

3ème hypothèse. $x = 0$, y et z différents de zéro. Dans ce cas, en écrivant que $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont nuls, il vient:

$$v(u - \lambda^2 w) = w(v - \lambda^2 u).$$

Mais:

$$u = z^2 - \lambda^2 y^2, \qquad v = -\lambda^2 z^2, \qquad w = y^2.$$

Portant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient:

$$\lambda^2 y^4 - 2(1 + \lambda^2) y^2 z^2 + z^4 = 0,$$

d'où:

$$\frac{z^2}{y^2} = 1 + \lambda^2 \pm \sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda^4} = 1 + \lambda^2 \pm 2\lambda.$$

On a donc les deux solutions:

$$z = \pm y(1 - \lambda) = \pm \lambda^2 y$$

$$z = \pm y(1 + \lambda) = \pm y \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda} = \pm \frac{y}{\lambda}.$$

Le premier genre de solution correspond aux axes ternaires, et le second, aux axes quinaires situés dans le plan zoy. Prenons d'abord l'axe ternaire $z = \lambda^2 y$. Nous avons:

$$u = z^2 - \lambda^2 y^2 = -\lambda^3 y^2,$$

$$v = -\lambda^2 z^2 = -\lambda^6 y^2,$$

$$w = y^2.$$

Donc:

$$u + v + w = (1 - \lambda^3 - \lambda^6) y^2 = 3\lambda^3 y^2$$

et comme $u + v + w = \lambda \rho^2$, on obtient:

$$y^2 = \frac{\rho^2}{3\lambda^2}.$$

On en déduit aisément:

$$v(u - \lambda^2 w) = \frac{\lambda^3}{9}\rho^4 = 3p\rho^4,$$

en posant

$$p = \frac{\lambda^3}{27}.$$

Pour qu'il existe un noeud de cette nature, il faut et il suffit que les deux équations en ρ^2:

$$(A + p)\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$
$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0,$$

aient une racine commune, d'où:

$$p^2D^2 + 2p(2C^3 - 3BCD + AD^2) - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) + (BC - AD)^2.$$

Si cette condition est remplie, la surface a 20 noeuds sur les axes ternaires. On peut la vérifier en posant:

$$(BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = 0,$$
$$pD^2 + 2(2C^3 - 3BCD + AD^2) = 0.$$

Si ces deux conditions sont remplies, la surface possède à la fois 30 noeuds sur les axes binaires et 20 noeuds sur les axes ternaires. Les premiers sont sur la sphère orthogonale qui coïncide avec une sphère directrice, les seconds sont sur l'autre sphère orthogonale.

Considérons maintenant l'axe quinaire $y = \lambda z$. On a dans ce cas:

$$u = z^2(1 - \lambda^4),$$
$$v = -\lambda^2 z^2,$$
$$w = \lambda^2 z^2,$$

d'où:

$$u + v + w = z^2(1 - \lambda^4) = \lambda\rho^2,$$

$$z^2 = \frac{\lambda\rho^2}{1 - \lambda^4},$$

$$u = \lambda\rho^2, \qquad v = -\frac{\lambda^3\rho^2}{1 - \lambda^4}, \qquad w = \frac{\lambda^3\rho^2}{1 - \lambda^4},$$

$$v(u - \lambda^2 w) = 3q\rho^4,$$

en posant

$$q = -\frac{\lambda^2}{5}.$$

Pour qu'il y ait des noeuds de cette nature, il faut et il suffit que les deux équations:

$$(A + q)\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0$$

aient une racine commune, d'où:

$$q^2 D^2 + 2q(2C^3 - 3BCD + AD^2) - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) + (BC - AD)^2 = 0.$$

Cette condition entraîne l'existence de 12 noeuds, qui peuvent coexister avec les 30 noeuds des axes binaires ou avec les 20 noeuds des axes ternaires. Mais les trois systèmes de noeuds ne peuvent se présenter en même temps (q étant différent de p) si l'on n'a pas:

$$(BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = 0,$$

$$2C^3 - 3BCD + AD^2 = 0,$$

$$D^2 = 0,$$

d'où $C = 0$, $D = 0$. Dans ce cas, les deux sphères qui contiennent les noeuds sont évanouissantes, et ceux-ci se confondent en un seul, à moins qu'on n'ait $B = 0$, et alors la surface se réduit aux plans directeurs.

4ème **hypothèse.** x, y et z différents de zéro. Les équations de condition donnent:

$$u(w - \lambda^2 v) = v(u - \lambda^2 w) = w(v - \lambda^2 u),$$

ce qu'on peut écrire:

$$w(u + \lambda^2 v) \qquad = uv(1 + \lambda^2),$$

$$w(u - v + \lambda^2 u) = uv\lambda^2,$$

d'où:

$$w[\lambda^2(u + \lambda^2 v) - (1 + \lambda^2)(u - v + \lambda^2 u)] = 0,$$

ou encore, en supprimant le facteur $\lambda^4 + \lambda^2 + 1$, qui n'est pas nul:

$$w(v - u) = 0.$$

On a de même:

$$u(w - v) = 0,$$

$$v(u - w) = 0,$$

Supposons d'abord $u = 0$. Il reste simplement $vw = 0$. Il faut donc que l'un des deux facteurs, v, par exemple, soit nul. On a ainsi:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = 0, \qquad x^2 - \lambda^2 z^2 = 0.$$

Le noeud est donc à l'intersection de deux plans directeurs, c'est-à-dire sur un axe binaire, ce qui ramène au cas étudié dans la deuxième hypothèse. Supposons maintenant que u, v, w soients différents de zéro. Alors il vient $u = v = w$ ou bien:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = x^2 - \lambda^2 z^2 = y^2 - \lambda^2 x^2.$$

On tire de là: $x^2 = y^2 = z^2$, et l'on retrouve les noeuds situés sur les axes ternaires.

La quatrième hypothèse ne conduit donc à aucun cas nouveau.

51. Il reste à chercher les noeuds à l'infini (génératrices doubles du cone asymptotique). Si α, β, γ sont les cosinus directeurs d'une direction nodale, et si l'on pose:

$$\gamma^2 - \lambda^2 \beta^2 = u',$$

$$\alpha^2 - \lambda^2 \gamma^2 = v',$$

$$\beta^2 - \lambda^2 \alpha^2 = w',$$

d'où

$$u' + v' + w' = 1 - \lambda^2 = \lambda,$$

il vient:

$$2\alpha u'(w' - \lambda^2 v') + 6A\alpha = 0,$$

$$2\beta v'(u' - \lambda^2 w') + 6A\beta = 0,$$

$$2\gamma w'(v' - \lambda^2 u') + 6A\gamma = 0,$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

De là les hypothèses suivantes:

1ère hypothèse. $\beta = \gamma = 0, \qquad \alpha = 1$

d'où

$$u'(w' - \lambda^2 v') + 3A = 0.$$

On a en même temps:

$$u' = 0, \qquad v' = 1, \qquad w' = -\lambda^2,$$

donc $A = 0$.

Si donc A est nul, les 15 directions binaires sont nodales; il y a 15 noeuds à l'infini. Le cone asymptotique est réduit aux plans directeurs. Ces 15 directions nodales coexistent:

1° avec un noeud à l'origine, si $D = 0$;

2° avec 30 noeuds à distance finie sur les axes binaires, si l'on a:

$$4B^2(C^2 - BD) = B^2C^2,$$

ou bien $3C^2 - 4BD = 0$. L'hypothèse $B = 0$ rejetterait ces noeuds à l'infini;

3° avec 20 noeuds sur les axes ternaires, si l'on a:

$$4(B^2 - pC)(C^2 - BD) = (BC - pD)^2;$$

4° avec 12 noeuds sur les axes quinaires, si l'on a:

$$4(B^2 - qC)(C^2 - BD) = (BC - qD)^2.$$

On peut avoir en même temps les 15 noeuds binaires à l'infini, les 30 noeuds binaires à distance finie et les 20 noeuds ternaires, soit en tout 65 noeuds.

2ème hypothèse. $\alpha = 0$, β et γ différents de zéro. Alors:

$$u' = \gamma^2 - \lambda^2\beta^2, \qquad v' = -\lambda^2\gamma^2, \qquad w' = \beta^2$$

et

$$v'(u' - \lambda^2 w') = w'(v' - \lambda^2 u')$$

ou bien:

$$\beta^2(\lambda^2\beta^2 - 2\gamma^2) + \gamma^2(\gamma^2 - 2\lambda^2\beta^2) = 0.$$

On tire de là, comme précédemment:

$$\gamma = \pm \lambda^2\beta \quad \text{et} \quad \beta = \pm \lambda\gamma.$$

Si l'on prend $\gamma = \lambda^2\beta$, il vient:

$$u' = \lambda^2\beta^2(\lambda^2 - 1), \qquad v' = -\lambda^6\beta^2, \qquad w' = \beta^2.$$

On tire de là, p ayant la même signification qu'à l'article précédent:

$$v'(u' - \lambda^2 w') = 3p$$

et la condition $v'(u' - \lambda^2 w') + 3A = 0$ devient $A + p = 0$.

Quand il en est ainsi, les dix directions ternaires sont nodales, et le cone asymptotique est coupé par un plan quelconque suivant une courbe unicursale.

Prenant maintenant $\beta = \lambda\gamma$, et raisonnant de la même façon, on est conduit à l'équation $A + q = 0$ pour caractériser les surfaces admettant les 6 axes quinaires comme directions nodales.

3ème hypothèse. α, β, γ différents de zéro. On trouve, comme dans le cas des noeuds à distance finie, que cette hypothèse se ramène aux précédentes.

En résumé, suivant que l'on a $A = 0$, $A + p = 0$ ou $A + q = 0$, le nombre des directions nodales s'élève à 15, à 10 ou à 6. Ces trois cas ne peuvent évidemment se présenter en même temps, mais chacun d'eux peut se combiner avec 30 noeuds binaires, avec 20 noeuds ternaires, ou avec 12 noeuds quinaires à distance finie. Deux espèces de noeuds à distance finie peuvent même coïncider avec une espèce de noeuds à l'infini. Le tableau des singularités qui peuvent se rencontrer sans que la surface se réduise à un cone ou à des plans ne comprend pas moins de 40 cas distincts, et cela en excluant les cas particuliers dans lesquels plusieurs noeuds viennent se réunir à l'origine pour y former un noeud multiple. Le nombre maximum de noeuds est de 65 (30 noeuds binaires — 20 noeuds ternaires — 15 directions nodales); nous avons déjà indiqué dans quelles conditions ce cas se réalise. La classe de la surface, qui est égale à 150 en l'absence de points nodaux, se trouve alors abaissée de $2 \times 65 = 130$ unités. La surface est donc de la 20ème classe.

Correction.

Page 240, dans les deux dernières équations, mettre partout μ au lieu de p.

SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DE DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES[1]

PAR

G. HUMBERT

À PARIS.

1. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique, et soit $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque; le problème qu'on se propose de traiter dans ce travail est le suivant:

Reconnaître si l'intégrale $I = \int \varphi(x, y)\,dx$, où y est liée à x par la relation $f(x, y) = 0$, est une fonction algébrique de x.

---

[1] Les résultats obtenus par M. HUMBERT ont déjà été trouvés par M. WEIERSTRASS bien des années auparavant et communiqués par lui dans son cours sur les fonctions abéliennes. Mais la méthode suivie par les deux savants est tout à fait différente. Chez M. WEIERSTRASS les conditions pour qu'une intégrale de la forme $\int R(x, y)\,dx$ soit une fonction algébrique de x découlent, comme simple corollaire, du théorème sur la réduction de chaque intégrale de la forme considérée à une somme d'intégrales normales de la première, de la seconde et de la troisième espèce. Pour effectuer cette réduction il faut et il suffit de connaître:

1° les coefficients des puissances négatives de t aux environs de tous les points analytiques pour lesquels le développement de $R(x_t, y_t)\dfrac{dx_t}{dt}$ contient en général des puissances négatives de t;

2° la valeur de $R(x, y)$ pour p points analytiques réguliers $(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)$ choisis arbitrairement.

Le théorème de M. WEIERSTRASS est cité, quoique sans démonstration, dans la thèse inaugurale de M. HETTNER (Berlin, 1877).

Le rédacteur en chef.

2. Abel a montré que si l'intégrale I est une fonction algébrique de x, elle s'exprime rationnellement en x et y, mais il n'a pas fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Ces conditions ont été données par Briot et Bouquet sous une forme très simple: pour que l'intégrale soit algébrique, il faut et il suffit 1° qu'elle n'admette pas de cycle polaire; 2° que ses périodes soient nulles.

Il est malheureusement impossible de vérifier directement si les conditions de la seconde catégorie sont ou non satisfaites: les périodes étant en effet les intégrales prises le long de certains contours finis, on obtient, en exprimant qu'elles sont nulles, des équations où figurent des intégrales définies qu'on ne peut, la plupart du temps, calculer qu'à l'aide de méthodes d'approximation; il en résulte que le critérium tiré de la considération des périodes n'est applicable que dans des cas simples, comme ceux qu'ont indiqués Briot et Bouquet.

Au contraire, les conditions de la première catégorie, qui expriment qu'il n'y a pas de cycles polaires, peuvent se vérifier sans difficulté; il suffit de calculer, dans le développement de chaque système de valeurs infinies de $\varphi(x, y)$, suivant les puissances croissantes, (entières ou fractionnaires) de $x - a$, aux environs du point $x = a$, le coefficient du terme en $\frac{1}{x-a}$, qui engendre un logarithme dans l'intégrale, et d'écrire que ce coefficient est nul.

Liouville, dans divers mémoires, a étudié la question à un tout autre point de vue: il suppose que l'intégrale I est liée à x par une relation algébrique $\psi(x, I) = 0$, à coefficients indéterminés, et cherche à déterminer ces coefficients de manière que la valeur de $\frac{dI}{dx}$ tirée de cette relation soit égale à $\varphi(x, y)$: il a pu ramener ainsi la question à la résolution d'un système d'équations linéaires.

Plus tard, M. Zeuthen, en supposant toujours l'intégrale algébrique, a indiqué un moyen sûr de trouver directement l'ordre de la relation $\psi(x, I) = 0$; il obtient ainsi la forme de cette relation à un nombre fini de constantes près, et, en écrivant que $\frac{dI}{dx}$ est égal à $\varphi(x, y)$, il détermine ces constantes, ou, si cette détermination est impossible, reconnait que l'intégrale cherchée est transcendante (Comptes rendus, 1880).

M. RAFFY, dans sa thèse de doctorat (Paris, 1883), a donné un autre procédé pour déterminer le degré de la relation $\psi(x, I) = 0$, par des opérations purement arithmétiques.

Ces méthodes ont l'inconvénient de ne pas fournir sous une forme explicite les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale soit algébrique; la méthode que nous allons développer nous semble remplir ce but, d'une manière relativement simple.

Elle repose sur la théorie des fonctions fuchsiennes, dont M. POINCARÉ a montré la liaision intime avec la théorie des intégrales abéliennes.

3. Soit p le genre de la courbe $f(x, y) = 0$; il résulte des recherches de M. POINCARÉ que les coordonnées, x et y, peuvent être considérées comme des fonctions fuchsiennes, de genre p, d'un paramètre t: nous choisirons des fonctions de la première famille.

Le polygone R_0, générateur de ces fonctions, jouira des propriétés suivantes: il a $4p$ côtés; les côtés opposés sont conjuguées deux à deux, c. à. d. transformés l'un dans l'autre par une des substitutions du groupe fuchsien correspondant, G; et la somme de ses angles est égale à 2π.

De plus, ab et $a'b'$ étant deux côtés opposés, tels que les points a' et b' correspondent respectivement à a et b par la substitution qui transforme ab en $a'b'$, si l'on décrit R_0 en partant de a, dans le sens ab, on parcourt le côté $a'b'$ dans le sens $b'a'$.

Cela posé, remplaçons dans l'intégrale I, x et y par leurs valeurs en fonction fuchsienne de t, et désignons par $\varphi(t)$ la fonction $\varphi(x(t), y(t))$, il viendra:

$$I = \int \varphi(t) \frac{dx}{dt} dt.$$

$\varphi(t)$ est une fonction fuchsienne de t; $\frac{dx}{dt}$ est une fonction thétafuchsienne du premier degré, c. à. d. telle qu'on ait:

$$F\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = F(t) \cdot (\gamma t + \delta)^2$$

en désignant par $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ une des substitutions de G, et en supposant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $x(t)$ ne change pas si l'on y opère la substitution précédente.

On aura donc, en posant:

$$\theta(t) = \varphi(t)\frac{dx}{dt},$$

pour l'expression de I:

$$I = \int \theta(t)dt$$

$\theta(t)$ étant également une fonction thétafuchsienne du premier degré.

4. L'intégrale I, si elle est algébrique, sera, d'après Abel, une fonction rationnelle de x et y, c. à. d. une fonction fuchsienne de t, et réciproquement; la question est ainsi ramenée à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale d'une fonction thétafuchsienne du premier degré soit une fonction fuchsienne.

Soit donc

$$I(t) = \int \theta(t)dt.$$

I devant être une fonction uniforme de t, dans l'intérieur du cercle fondamental, il est tout d'abord nécessaire que les résidus de $\theta(t)$, à l'intérieur du polygone R_0, soient nuls.

Ces conditions reviennent aux premières conditions de Briot et Bouquet: le résidu de $\theta(t)$ relatif à un infini α de cette fonction est en effet égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \theta(t)dt$ le long d'un petit contour entourant le point α. Soient a, b les coordonnées du point d'argument α sur la courbe $f(x, y) = 0$; supposons d'abord que ce point ne soit pas un point critique pour la fonction y, de x, définie par la relation $f(x, y) = 0$. Quand, dans le plan des quantités t, le point t décrit un contour élémentaire autour du point α, le point x, dans le plan des quantités x, décrit *une seule fois* un contour élémentaire autour du point a, et comme on a

$$\theta(t) = \varphi(x, y)\frac{dx}{dt},$$

l'intégrale $\int \theta(t)dt$ le long du contour considéré, est égale à l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ le long d'un petit contour entourant le point a, qui est un infini de $\varphi(x, y)$, et de I, c. à. d. égale au produit de $2\pi i$ par le résidu de la fonction $\varphi(x, y)$, considérée comme fonction de x, pour le point $x = a$; ou encore à la *période polaire* de I, pour le point $x = a$.

Si le point a est un point critique de la fonction y, on aura, aux environs de la valeur $t = \alpha$:

$$x - a = (t - \alpha)^q \xi(t); \; y - b = (t - \alpha)^r \eta(t);$$

ξ et η étant deux fonctions ne devenant ni nulles ni infinies pour $t = \alpha$; q et r désignant deux entiers positifs. Il en résultera pour $\varphi(x, y)$ une expression de la forme $(t - a)^{-s}\chi(t)$, s étant un entier négatif. Quand t décrit un petit cercle autour du point α, x décrit q fois un petit contour autour du point a; aux environs de ce point, on aura d'ailleurs pour $\varphi(x, y)$ un développement de la forme:

$$\varphi(x, y) = A(x - a)^{-\frac{s}{q}} + B(x - a)^{\frac{1-s}{q}} + \ldots + H(x - a)^{-1} + \ldots$$

et la valeur de l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, quand x décrit q fois un contour élémentaire autour du point a sera égal à $2qi\pi H$, c. à. d. à la *période polaire* de I, pour le point $x = a$.

Il en résulte que, dans tous les cas, les conditions obtenues en écrivant que les résidus de $\varphi(x, y)\dfrac{dx}{dt}$ dans l'intérieur de R_0, sont nuls, expriment que l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ n'a pas de *période polaire*, ce qui revient aux premières conditions de BRIOT et BOUQUET.

5. Supposons ces conditions remplies, $I(t)$ sera, dans le cercle fondamental, fonction uniforme de t. Si c'est une fonction fuchsienne, considérons, le long du périmètre de R_0, l'intégrale $J = \int_{R_0} I(t)\theta(t)dt$, où $\theta(t)$ désigne une fonction thétafuchsienne holomorphe de degré un: il existe p de ces fonctions, linéairement distinctes, si p est le genre des fonctions fuchsiennes considérées. Je dis que l'intégrale J est nulle.

Soient en effet ab et $a'b'$ deux côtés opposés de R_0, transformés l'un dans l'autre par la substitution $\left(t, \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ et posons $t_1 = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$.

Les éléments de J, relatifs à deux points correspondants t et t_1, sur les côtés ab et $a'b'$ sont $I(t)\theta(t)dt$ et $- I(t_1)\theta(t_1)dt_1$.

Or on a:

$$I(t_1) = I(t),$$
$$\theta(t_1) = \theta(t)(\gamma t + \delta)^2,$$
$$dt_1 = dt(\gamma t + \delta)^{-2},$$

donc:

$$I(t_1)\theta(t_1)dt_1 = I(t)\theta(t)dt$$

et par suite l'intégrale J est nulle le long de R_0. En d'autres termes, la somme des résidus de la fonction $I(t)\theta(t)$ est nulle dans l'intérieur de R_0.

$\theta(t)$ étant une fonction holomorphe, les infinis de $I(t)\theta(t)$ sont ceux de $I(t)$, c. à. d. de $\Theta(t)$, et les résidus correspondants se calculent sans difficulté quand on connaît le développement de $\Theta(t)$ suivant les puissances croissantes de $t-\alpha$, autour du pôle $t=\alpha$.

En donnant successivement à $\theta(t)$ les valeurs $\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_p(t)$ des p fonctions thétafuchsiennes holomorphes de degré un, linéairement distinctes, on obtient ainsi p équations, exprimant que la somme des résidus, dans l'intérieur de R_0, des fonctions $I(t)\theta_i(t)$ est nulle. Nous désignerons ces équations sous le nom d'équations (E).

6. Les équations (E) sont elles suffisantes pour que l'intégrale $I(t)$ soit une fonction fuchsienne? Il serait aisé de démontrer qu'il n'en est rien; nous allons d'ailleurs donner une interprétation analytique de ces équations, au point de vue de la nature de la fonction I.

Si la somme des résidus de chacune des p fonctions $I(t)\theta_i(t)$ dans l'intérieur de R_0 est nulle, la fonction $I(t)$ sera égale à une fonction fuchsienne augmentée d'une fonction linéaire et homogène des intégrales $\int\theta_1(t)dt, \int\theta_2(t)dt, \ldots, \int\theta_p(t)dt$.

Pour démontrer cette proposition importante, nous supposerons, dans le but d'abréger l'exposition, qu'on a $p=2$: la méthode est d'ailleurs absolument générale.

L'intégrale $I(t)$ est, par hypothèse, une fonction uniforme de t; or on a, $\left(t, \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$ désignant toujours une des substitutions du groupe G:

$$\Theta\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) = \Theta(t)(\gamma t+\delta)^2$$

ou:

$$\Theta\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) = \Theta(t); \text{ et, puisque } I=\int\Theta(t)dt:$$

$$I\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right) = I(t)+m$$

m étant une constante. Le groupe G dérive des $2p$ substitutions fondamentales qui transforment l'un dans l'autre les côtés opposés de R_0; si p est égal à 2, on aura quatre substitutions, et il viendra:

$$I\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) = I(t) + m_i. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Si l'on désigne par $G_k(t)$ l'intégrale $\int \theta_k(t)dt$, on aura de même:

$$G_1\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) = G_1(t) + \Omega_{1i},$$
$$G_2\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) = G_2(t) + \Omega_{2i}. \qquad (i=1,2,3,4)$$

Les quantités m, Ω_1 et Ω_2 sont les périodes des intégrales I, G_1 et G_2.

Cela posé, je dis que l'on peut déterminer deux constantes, λ_1 et λ_2, telles que la fonction

$$I(t) + \lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t)$$

soit une fonction fuchsienne. Il faut pour cela que cette fonction ne change pas si l'on y remplace t par $\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}$, c. à. d. qu'on ait:

$$(A) \qquad \begin{vmatrix} m_1 + \lambda_1 \Omega_{11} + \lambda_2 \Omega_{21} = 0, \\ m_2 + \lambda_1 \Omega_{12} + \lambda_2 \Omega_{22} = 0, \\ m_3 + \lambda_1 \Omega_{13} + \lambda_2 \Omega_{23} = 0, \\ m_4 + \lambda_1 \Omega_{14} + \lambda_2 \Omega_{24} = 0. \end{vmatrix}$$

Il s'agit de montrer que ces quatre équations en λ_1, λ_2 sont compatibles, si les résidus de chacune des fonctions $I(t)\theta_1(t)$ et $I(t)\theta_2(t)$ ont une somme nulle, c. à. d. si les intégrales $\int I(t)\theta_1(t)dt$ et $\int I(t)\theta_2(t)dt$ sont nulles le long de R_0.

Or soient toujours $a_i b_i$ et $a'_i b'_i$ deux côtés opposés de R_0, tels que ab se transforme en $a'b'$ par la substitution $\left(t, \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$; on a évidemment, pour la partie de l'intégrale $\int I(t)\theta_k(t)dt$ qui correspond à ces côtés, la valeur:

$$m_i \int_{a_i}^{b_i} \theta_k(z)dz. \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,3,4 \\ k=1,2 \end{pmatrix}$$

Désignons l'intégrale qui figure dans cette expression par ω_{kl}; on aura donc:

$$(B)\qquad \begin{cases} m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} + m_3\omega_{13} + m_4\omega_{14} = 0, \\ m_1\omega_{21} + m_2\omega_{22} + m_3\omega_{23} + m_4\omega_{24} = 0. \end{cases}$$

Si l'on écrit que l'intégrale $\int G_k(t)\theta_l(t)$ est nulle le long de R_0 (la fonction $G_k(t)\theta_l(t)$ est en effet holomorphe dans R_0), on aura de même en donnant à k et l les valeurs 1 et 2, les quatre équations:

$$(C)\qquad \begin{cases} \Omega_{11}\omega_{11} + \Omega_{12}\omega_{12} + \Omega_{13}\omega_{13} + \Omega_{14}\omega_{14} = 0, \\ \Omega_{21}\omega_{11} + \Omega_{22}\omega_{12} + \Omega_{23}\omega_{13} + \Omega_{24}\omega_{14} = 0, \\ \Omega_{11}\omega_{21} + \Omega_{12}\omega_{22} + \Omega_{13}\omega_{23} + \Omega_{14}\omega_{24} = 0, \\ \Omega_{21}\omega_{21} + \Omega_{22}\omega_{22} + \Omega_{23}\omega_{23} + \Omega_{24}\omega_{24} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la première équation (B) et les deux premières équations (C); si les déterminants qu'on peut former en combinant 3 des colonnes de la matrice:

$$(D)\qquad \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \end{matrix}$$

ne sont pas tous nuls, on tirera de ces équations les valeurs proportionnelles de ω_{11}, ω_{12}, ω_{13}, ω_{14}.

La deuxième équation (B) et les deux dernières équations (C) montrent alors qu'on aura des valeurs proportionnelles identiques pour ω_{21}, ω_{22}, ω_{23}, ω_{24}.

Il en résulte qu'on pourra former une fonction $\theta(t) = \mu_1\theta_1(t) + \mu_2\theta_2(t)$, μ_1 et μ_2 étant des constantes, telle que les quantités ω correspondantes soient toutes nulles, c. à. d. telles que l'intégrale $\int\theta(t)dt$ soit nulle le long de chacun des côtés du polygone R_0.

Je dis que, dans ce cas, l'intégrale $G(t) = \int\theta(t)dt$ serait une fonction fuchsienne de t. Evaluons en effet $G\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$. On a:

$$G\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) - G(t) = \int_t^{\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}} \theta(t)dt.$$

Soit Ω_i la valeur commune des deux membres; Ω_i est la valeur de $\int\theta(t)dt$ le long d'une ligne qui joint deux points quelconques, transformés l'un de l'autre par la substitution $\left(t, \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$: si l'un de ces points est un sommet de R_0, le second sera également un sommet, et l'intégrale pourra être prise le long du périmètre du polygone, entre ces deux points. L'intégrale Ω_i sera donc une somme d'intégrales ω, et sera par suite égale à zéro. On en conclut que $G(t)$ est bien une fonction fuchsienne, résultat absurde puisque $G(t)$ est holomorphe dans le polygone R_0.

Pour échapper à cette conclusion, il faut nécessairement admettre que les déterminants formés avec 3 colonnes quelconques de la matrice (D) sont nuls: c'est précisément la condition pour que les équations (A) se réduisent à deux d'entre elles.

Ces équations d'ailleurs, donneront toujours pour λ_1 et λ_2 des valeurs finies; il ne pourrait en être autrement que si les déterminants d'ordre deux formés avec la matrice

$$\begin{matrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \end{matrix}$$

étaient tous nuls, ce qui est impossible, car, autrement, on formerait une fonction

$$\mu_1 G_1(t) + \mu_2 G_2(t),$$

pour laquelle toutes les périodes seraient nulles.

Le théorème énoncé plus haut, sur la signification des équations (E) est donc démontré.

7. Ces équations peuvent se mettre sous une forme plus commode au point de vue des applications.

Le résidu de la fonction $I(t)\theta_i(t)$, relatif à un infini, $t = \alpha$, de I, est en effet égal à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int I(t)\theta_i(t)dt$$

le long d'un contour infiniment petit, enveloppant le point $t = \alpha$; or en

désignant toujours par $G_i(t)$ la fonction $\int \theta_i(t)dt$, on a, en intégrant par parties:

$$\int I(t)\theta_i(t)dt = I(t)G_i(t) - \int \theta(t)G_i(t)dt.$$

La fonction $I(t)G_i(t)$ étant uniforme a la même valeur à l'origine et à la fin du contour; le résidu de $I(t)\theta_i(t)$, pour le pôle $t = \alpha$, est donc égal, et de signe contraire, au résidu de $\theta(t)G_i(t)$ pour le même pôle, et les équations (E) exprimeront que la somme des résidus de cette dernière fonction, dans le polygone R_0, est nulle.

8. Appliquons maintenant ces résultats à l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$; x et y étant liées par la relation de genre p, $f(x, y) = 0$.

On sait que les fonctions thétafuchsiennes holomorphes de degré un,

$$\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \ldots,\ \theta_p(t),$$

ont les expressions suivantes:

$$\theta_i(t) = \frac{dx}{dt}\frac{P_i(x, y)}{f'_y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

x et y étant remplacées dans le second membre par leurs valeurs en fonction fuchsienne de t, et $P_i(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $n - 3$ adjointe à la courbe $f = 0$, supposée de degré n.

On aura alors

$$G_i(t) = \int \theta_i(t)dt = \int \frac{dx}{dt}\frac{P_i(x, y)}{f'_y}dt$$

et par suite, dans le plan des quantités x, il viendra:

$$G_i(x) = \int \frac{P_i(x, y)}{f'_y}dx.$$

G_i sera donc une intégrale abélienne de première espèce.

Quant à la valeur de l'intégrale $\int \theta(t)G_i(t)dt$, le long d'un contour infiniment petit enveloppant un pôle de $\theta(t)$, elle est égale, d'après le raisonnement fait au n° 4, à la période polaire de l'intégrale

$$\int \varphi(x, y)G_i(x)dx,$$

correspondant à un infini, $x = a$, de la fonction $I(x)$.

L'intégrale

$$I = \int \varphi(x, y) dx$$

sera donc égale à une fonction rationnelle de x et y, augmentée d'une intégrale abélienne de première espèce, si la somme des périodes polaires de l'intégrale $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$, dans tout le plan, est égale à zéro. On peut par suite énoncer le théorème suivant.

Théorème I. *Soient: $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre p; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; $G_1, G_2, \ldots, G_p$ p intégrales abéliennes de première espèce distinctes, appartenant à la courbe $f = 0$.*

Pour que l'intégrale $I = \int \varphi(x, y) dx$ se réduise à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, il faut et il suffit:

1° que cette intégrale n'admette aucune période polaire;

2° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$ soit nulle.

9. Les dernières conditions s'expriment aussi aisément que les premières et évidemment sans aucun signe d'intégration si les premières sont satisfaites; il suffit, dans le développement de la fonction $\varphi(x, y) G_i(x)$, autour d'un point $x = a$, qui est un infini de l'intégrale I, de calculer le coefficient du terme en $\frac{1}{x - a}$.

On ne doit pas perdre de vue que I devient infini pour $x = \infty$ si le numérateur de $\varphi(x, y)$ n'est pas d'un degré inférieur de deux unités au moins, au degré du numérateur, et l'on devra en posant $x = \frac{1}{x'}$ calculer également le coefficient de $\frac{1}{x'}$ dans le développement de $\frac{\varphi\left(\frac{1}{x'}, y\right)}{x'^2}$, aux environs du point $x' = 0$.

Nous allons donner un exemple simple de l'application du théorème I.

10. Soit

$$\varphi(x, y) = \frac{Q(x, y)}{R(x, y)},$$

Q et R étant deux polynômes entiers, tels que le degré de Q soit inférieur de deux unités à celui de R: l'intégrale

$$I = \int \varphi(x, y)\,dx$$

ne devient infinie que pour des valeurs finies de x, et ces valeurs sont celles qui annulent simultanément $R(x, y)$ et $f(x, y)$. Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, ou, dans le plan des t, pour que l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)}{R(x, y)} \frac{dx}{dt} dt,$$

se réduise à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, il faut tout d'abord que les pôles de la fonction $\frac{Q(x, y)}{R(x, y)} \frac{dx}{dt}$ soient des pôles d'ordre au moins égal à 2; cela résulte de ce que les résidus correspondant à ces pôles doivent être nuls. En d'autre termes, la courbe $R = 0$ doit avoir avec la courbe $f = 0$ un contact du premier ordre au moins, en tous les points, non situés sur la courbe $Q = 0$, où elle la rencontre; si, en un de ces points, $Q = 0$ a avec $f = 0$ un contact d'ordre μ, $R = 0$ devra y avoir avec $f = 0$ un contact d'ordre ν, ν étant tel qu'on ait $\nu \geqq \mu + 2$, ou $\nu \leqq \mu$.

Admettons, pour fixer les idées, que la courbe $R = 0$ touche la courbe $f = 0$, en un certain nombre de points, de coordonnées a_1, b_1; a_2, b_2; ... et que la courbe $Q = 0$ passe par tous les autres points communs aux deux premières; les infinis de l'intégrale I seront les points a_1, a_2, ... Supposons, pour simplifier, que ces points ne soient pas des points critiques pour la fonction y de x, qui vérifie l'équation $f(x, y) = 0$.

Nous devons écrire en premier lieu que la période polaire, pour le point $x = a$, de l'intégrale I est nulle, c. à. d. que dans le développement de $\varphi(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $x - a = h$, le coefficient du terme $\frac{1}{h}$ s'annule.

Or on a:

$$\frac{Q(x, y)}{R(x, y)} = \frac{Q(a, b) + hQ'(a, b) + \dots}{\frac{h^2}{2} R''(a, b) + \frac{h^3}{6} R'''(a, b) + \dots}$$

en posant:

$$Q'(a, b) = \frac{\partial Q}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial b} y',$$

$$R''(a, b) = \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} y' + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} y'^2 + \frac{\partial R}{\partial b} y'',$$

$$R'''(a, b) = \frac{\partial^3 R}{\partial a^3} + 3\frac{\partial^3 R}{\partial a^2 \partial b} y' + 3\frac{\partial^3 R}{\partial a \partial b^2} y'^2 + \frac{\partial^3 R}{\partial b^3} y'^3$$

$$+ 3\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial b} y'' + 3\frac{\partial^2 R}{\partial b^2} y'y'' + \frac{\partial R}{\partial b} y''',$$

y', y'', y''' étant les valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ au point a, b.

Le coefficient de $\frac{1}{h}$ est égal, dans le développement de $\frac{Q}{R}$, à

$$\frac{2}{3R''^2}[3Q'R'' - QR'''];$$

on doit donc avoir la première série d'équations:

$$3Q'(a, b)R''(a, b) - Q(a, b)R'''(a, b) = 0. \qquad \left(a, b = \begin{cases} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{cases}\right)$$

Les valeurs de y', y'', y''' se calculent à l'aide de la relation $f(x, y) = 0$.

Il faut maintenant calculer le terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(x, y)G_i(x)$; comme il n'y a pas de terme en $\frac{1}{h}$ dans $\varphi(x, y)$, et que le terme en $\frac{1}{h^2}$ est égal à $\frac{2Q}{R''}$, on aura, pour le terme cherché:

$$\frac{2Q(a, b)}{R''(a, b)} \frac{dG_i}{da},$$

$\frac{dG_i}{da}$ étant la dérivée pour $x = a$, de la fonction

$$G_i = \int \frac{P_i(x, y)}{f'_y} dx;$$

cette dérivée est donc

$$\frac{P_i(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial b}(a, b)}.$$

On aura ainsi la seconde série d'équations:

$$\frac{Q(a_1, b_1)P_i(a_1, b_1)}{R''(a_1, b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)} + \frac{Q(a_2, b_2)P_i(a_2, b_2)}{R''(a_2, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)} + \ldots = 0.$$

La somme s'étend à toutes les valeurs de a et b qui annulent simultanément $R(x, y)$ et $f(x, y)$, sans annuler $Q(x, y)$; en mettant successivement à la place de P_i les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$, on obtient p équations dans cette seconde série; rappelons que les polynômes

$$P_1(x, y), \; P_2(x, y), \; \ldots$$

sont les premiers membres des équations de p courbes d'ordre $n - 3$, adjointes à la courbe $f = 0$, et linéairement distinctes.

Si les fonctions Q et R vérifient les deux séries d'équations qui précèdent, l'intégrale $\int \frac{Q(x, y)}{R(x, y)} dx$, est nécessairement égale à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, appartenant à la courbe $f(x, y) = 0$.

Il nous reste maintenant afin de terminer l'examen du problème primitif, à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales de première espèce disparaissent dans l'expression de l'intégrale $\int \varphi(x, y) dx$, qui se réduira ainsi à une fonction rationnelle de x, y.

11. Revenons à cet effet à l'intégrale

$$I(t) = \int \theta(t) dt.$$

Si cette intégrale est uniforme, et si les équations que nous avons désignées par (E) sont vérifiées, on aura:

$$I(t) = F(t) + \lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t),$$

$F(t)$ étant une fonction fuchsienne et $G_i(t)$ désignant toujours l'intégrale

$\int\theta_i(t)dt$. Nous allons chercher à quelles conditions doit satisfaire $\theta(t)$, pour qu'on ait

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0.$$

Soit à cet effet $\zeta(t)$ une fonction thétafuchsienne du premier degré, n'ayant dans R_0 qu'un pôle double, $t = \beta$. On voit comme au n° 5 que l'intégrale $\int I(t)\zeta(t)dt$ est nulle le long du périmètre de R_0, si $I(t)$ est une fonction fuchsienne, c. à. d. se réduit à $F(t)$.

En considérant successivement p fonctions telles que $\zeta(t)$, que nous désignerons par

$$\zeta_1(t),\ \zeta_2(t),\ \ldots,\ \zeta_p(t),$$

admettant respectivement pour infinis doubles les quantités

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_p,$$

on obtient ainsi p équations, auxquelles satisfait l'intégrale $I(t)$, dans le cas où elle se reduit à une fonction fuchsienne.

Nous allons montrer maintenant que si ces équations sont vérifiées, I est nécessairement une fonction fuchsienne.

On a en effet:

$$\int_{R_0} I(t)\zeta_i(t)dt = \int_{R_0} F(t)\zeta_i(t)dt + \int_{R_0} [\lambda_1 G_1(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t)]\zeta_i(t)dt.$$

Or la première intégrale du second membre est nulle, puisque $F(t)$ est une fonction fuchsienne; la deuxième est égale à $2\pi i$ multiplié par la somme des résidus dans R_0 de la fonction

$$(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_p G_p)\zeta_i.$$

Cette fonction n'a pas d'autre pôle que le pôle double β_i; d'ailleurs le résidu de $\zeta_i(t)$ par rapport à ce pôle est nul, car l'intégrale $\int\zeta_i(t)dt$ est nulle le long de R_0, par cela seul que $\zeta_i(t)$ est une fonction thétafuchsienne de degré un. Soit A_i le coefficient, nécessairement différent de zéro, de $\frac{1}{(t-\beta_i)^2}$ dans le développement de $\zeta_i(t)$ suivant les puissances croissantes de $t - \beta_i$.

Le résidu de

$$(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots)\zeta_i$$

par rapport au pôle β_i sera ainsi égal à la valeur, pour $t = \beta_i$, de la fonction

$$A_i\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial t} + \dots\right);$$

c. à. d. de

$$A_1[\lambda_1 \theta_1(\beta_i) + \lambda_2 \theta_2(\beta_i) + \dots].$$

On a donc les p relations:

$$\lambda_1 \theta_1(\beta_i) + \lambda_2 \theta_2(\beta_i) + \dots + \lambda_p \theta_p(\beta_i) = 0. \qquad (i=1, 2, \dots, p)$$

Or les quantités β_i sont arbitraires; si on les choisit de manière à ne pas annuler le déterminant des relations précédentes, c. à. d. de manière à ne pas annuler une même fonction thétafuchsienne holomorphe de degré un, on tirera nécessairement de ces relations

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0.$$

12. On peut, comme au n° 7 mettre les conditions précédentes sous une autre forme; soit en effet

$$H_i(t) = \int \zeta_i(t) dt;$$

$H_i(t)$ est une fonction uniforme de t, dans le cercle fondamental, puisque le résidu de $\zeta_i(t)$ correspondant au pôle double β_i, est nul. Il en résulte qu'au lieu d'écrire que la somme des résidus dans R_0, de la fonction $I(t)\zeta_i(t)$ est nulle, on peut écrire le même résultat pour la fonction $\theta(t) H_i(t)$.

13. Pour appliquer ces résultats à l'intégrale $\int \varphi(x, y) dx$, il faut d'abord chercher l'expression de $H_i(t)$ en fonction de x.

H_i étant une intégrale qui n'a qu'un infini, on voit sans difficulté que, dans le plan des quantités x, cette intégrale est une intégrale abélienne de seconde espèce, et l'on a ainsi:

$$H_i(x) = \int \frac{\Omega_i(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(h_i x + k_i y + l_i)} dx,$$

$h_i x + k_i y + l_i = 0$ étant l'équation d'une tangente quelconque à la courbe $f = 0$; $\Omega_i(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe de degré $n - 2$, adjointe à la précédente supposée de degré n, et la coupant aux points, autres que le point de contact, où elle est rencontrée par la tangente considérée.

Il en résulte, comme au n° 8, que les conditions qu'on vient de trouver, expriment que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales

$$\int \varphi(x, y) H_i(x) dx$$

est nulle. On peut donc énoncer finalement la proposition suivante qui résume notre théorie.

Théorème II. *Soient: $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre p; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; $G_1, G_2, \ldots, G_p$, p intégrales abéliennes de première espèce distinctes; $H_1, \ldots, H_p$, p intégrales de deuxième espèce appartenant à la courbe $f = 0$.*

Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y) dx$ se réduise à une fonction rationnelle de x, y, il faut et il suffit:

1° que cette intégrale n'ait pas de période polaire;

2° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$ soit nulle;

3° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) H_i(x) dx$ soit également nulle.[1]

La période polaire d'une intégrale $\int F(x, y) dx$, pour un infini $x = a$ de cette intégrale est ainsi définie: supposons que pour revenir à la même valeur de $F(x, y)$ il faille faire décrire à la variable x q fois un contour infiniment petit autour du point a; la période polaire sera la valeur que prend l'intégrale quand la variable décrit q fois ce contour.

Si a n'est pas un point critique pour la fonction y, qui vérifie la relation $f(x, y) = 0$, la fonction $F(x, y)$ se développera suivant les puissances croissantes entières de $x - a$, et la période polaire sera égale à $2\pi i$ fois le résidu correspondant.

Si a est un point critique, il sera nécessaire de calculer les développements de y et $F(x, y)$ suivant les puissances croissantes et fractionnaires

[1] Il faut toutefois, pour que les conditions 3° soient suffisantes, que les points de la courbe $f = 0$ où les p fonctions H_i deviennent infinies, ne soient pas sur une même courbe de degré $n - 3$ adjointe à la courbe $f = 0$ (n° 11).

de a; le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le dernier développement fournira la période polaire.[1]

Comme les conditions 2°, les conditions 3° ne renferment aucun signe d'intégration si les conditions 1° sont vérifiées.

14. En appliquant ces principes à l'exemple traité au n° 9, on trouve aisément pour la troisième série d'équations, les p relations suivantes, où c_i, d_i sont les coordonnées du point de la courbe $f = 0$ où H_i devient infini:

$$\frac{2Q(a_1, b_1)\Omega_i(a_1, b_1)}{R''(a_1, b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)[h_i a_1 + k_i b_1 + l_i]} + \frac{2Q(a_2, b_2)\Omega_i(a_2, b_2)}{R''(a_2, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)[h_i a_2 + k_i b_2 + l_i]} + \cdots$$

$$= \frac{Q(c_i, d_i)\Omega_i(c_i, d_i)}{R(c_i, d_i)\frac{\partial f}{\partial d_i}(c_i, d_i)k\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i$ étant, au point c_i, d_i, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, déduite de l'équation $f(x, y) = 0$.

15. Remarque. Les conditions données par le théorème II ont une signification simple, qui résulte immédiatement de tout ce qui précède.

Supposons l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ décomposée par le procédé classique en intégrales abéliennes de première, de seconde et de troisième espèce.

Les conditions 1° expriment que les intégrales de troisième espèce disparaissent;

les conditions 2°, que la somme des intégrales de seconde espèce se réduit à une fonction rationnelle de x, y;

les conditions 3°, que les intégrales de première espèce disparaissent à leur tour.

---

[1] Cf. Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 176—177.

TABLE DES VALEURS DES SOMMES

$$S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$$

PAR

T. J. STIELTJES

À TOULOUSE.

Dans le *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* (tome II, pag. 432), LEGENDRE a donné avec 16 décimales les valeurs de $S_2, \ldots, S_{35}$.

Cette table de LEGENDRE ne contient pas de graves erreurs, mais la comparaison avec nos résultats montre que dans 6 cas les valeurs de LEGENDRE ont besoin d'une correction d'une unité de la dernière (seizième) décimale; ce sont les suivants:

	S_5,	S_7,	S_{10},	S_{11},	S_{16},	S_{35},
corrections	-1,	$+1$,	$+1$,	$+1$,	$+1$,	$+1$.

Ces nombres S_k figurent dans le développement

$$\log \Gamma(1 + x) = - Cx + \sum_2^\infty \frac{(-1)^k}{k} S_k x^k,$$

et la table de LEGENDRE a ainsi servi de base au calcul des coefficients du développement de la fonction entière $[\Gamma(x)]^{-1}$ entrepris par M. BOURGUET. (Acta Mathematica t. 2, p. 271 et suiv.)

La disposition de la table suivante n'exige aucune explication, mais nous devons indiquer l'approximation des valeurs inscrites dans le tableau.

On a donné le résultat brut d'un calcul fait avec 32 décimales. Chaque nombre est la somme d'un certain nombre (trente au plus) de

nombres calculés à une demi-unité de la $32^{\text{ème}}$ décimale près. Par conséquent l'erreur d'une des valeurs données sera toujours inférieure à

$$0{,}0000000000 \quad 0000000000 \quad 0000000000 \quad 15.$$

Mais il va sans dire que l'erreur sera presque toujours notablement inférieure à cette limite, d'abord par suite d'une compensation d'erreurs et ensuite aussi parce qu'à partir de $k = 22$ on a obtenu S_k par l'addition de moins de 30 nombres partiels.

Les relations

$$\sum_1^\infty (S_{2k} - 1) = \frac{3}{4}, \qquad \sum_1^\infty (S_{2k+1} - 1) = \frac{1}{4}$$

permettent de contrôler l'ensemble des calculs. La première vérification donne une erreur de 5 unités, la seconde une erreur de 3 unités de la $32^{\text{ème}}$ décimale.

k		S_k		
2	1,6449340668	4822643647	2415166646	03
3	1,2020569031	5959428539	9738161511	46
4	1,0823232337	1113819151	6003696541	18
5	1,0369277551	4336992633	1365486457	03
6	1,0173430619	8444913971	4517929790	93
7	1,0083492773	8192282683	9797549849	82
8	1,0040773561	9794433937	8685238508	65
9	1,0020083928	2608221441	7852769232	40
10	1,0009945751	2781808533	7145958900	34
11	1,0004941886	0411946455	8702282526	46
12	1,0002460865	5330804829	8637998047	72
13	1,0001227133	4757848914	6751836526	37
14	1,0000612481	3505870482	9258545105	14
15	1,0000305882	3630702049	3551728510	66
16	1,0000152822	5940865187	1732571487	66
17	1,0000076371	9763789976	2273600293	54
18	1,0000038172	9326499983	9856461644	61
19	1,0000019082	1271655393	8925656957	80
20	1,0000009539	6203387279	6113152038	70

k	S_k			
21	1,0000004769	3298678780	6463116719	62
22	1,0000002384	5050272773	2990003648	18
23	1,0000001192	1992596531	1073067788	73
24	1,0000000596	0818905125	9479612440	20
25	1,0000000298	0350351465	2280186063	69
26	1,0000000149	0155482836	5041234658	50
27	1,0000000074	5071178983	5429491981	01
28	1,0000000037	2533402478	8457054819	20
29	1,0000000018	6265972351	3049006403	90
30	1,0000000009	3132743241	9668182871	76
31	1,0000000004	6566290650	3378407298	92
32	1,0000000002	3283118336	7650549200	16
33	1,0000000001	1641550172	7005197759	30
34	1,0000000000	5820772087	9027008892	44
35	1,0000000000	2910385044	4970996869	29
36	1,0000000000	1455192189	1041984235	93
37	1,0000000000	0727595983	5057481014	52
38	1,0000000000	0363797954	7378651190	24
39	1,0000000000	0181898965	0307065947	59
40	1,0000000000	0090949478	4026388928	25
41	1,0000000000	0045474737	8304215402	68
42	1,0000000000	0022737368	4582465251	53
43	1,0000000000	0011368684	0768022784	94
44	1,0000000000	0005684341	9876275856	09
45	1,0000000000	0002842170	9768893018	55
46	1,0000000000	0001421085	4828031606	78
47	1,0000000000	0000710542	7395210852	72
48	1,0000000000	0000355271	3691337113	67
49	1,0000000000	0000177635	6843579120	33
50	1,0000000000	0000088817	8421093081	59

k	S_k			
51	1,0000000000	0000044408	9210314381	34
52	1,0000000000	0000022204	4605079804	20
53	1,0000000000	0000011102	2302514106	61
54	1,0000000000	0000005551	1151248454	81
55	1,0000000000	0000002775	5575621361	24
56	1,0000000000	0000001387	7787809725	24
57	1,0000000000	0000000693	8893904544	16
58	1,0000000000	0000000346	9446952165	92
59	1,0000000000	0000000173	4723476047	58
60	1,0000000000	0000000086	7361738011	99
61	1,0000000000	0000000043	3680869002	06
62	1,0000000000	0000000021	6840434499	72
63	1,0000000000	0000000010	8420217249	42
64	1,0000000000	0000000005	4210108624	57
65	1,0000000000	0000000002	7105054312	24
66	1,0000000000	0000000001	3552527156	10
67	1,0000000000	0000000000	6776263578	04
68	1,0000000000	0000000000	3388131789	02
69	1,0000000000	0000000000	1694065894	51
70	1,0000000000	0000000000	0847032947	25

Nous avons mis à profit nos résultats pour calculer la constante Eulérienne d'après la formule

$$C = 1 + \log 2 - \log 3 - \sum_{1}^{\infty} \frac{S_{2k+1} - 1}{(2k+1)4^k},$$

et nous avons obtenu la valeur suivante qui est exacte avec 33 déc.:

$$C = 0.5772156649 \quad 0153286060 \quad 6512090082 \quad 402.$$

ZUR THEORIE DES FLÄCHENPOTENTIALS

VON

J. WEINGARTEN
in BERLIN.

Im neunten Abschnitt der *allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* verweist GAUSS bei der Besprechung der Unstetigkeiten der zweiten Differentialquotienten des Potentials einer in einem endlichen Raum stetig vertheilten Masse, auf ein in späteren Abschnitten bewiesenes Theorem, aus dem die Bestimmung des Betrages dieser Unstetigkeiten hervorgeht. Der Beweis des Theorems selbst erfordert einen gewissen Aufwand an analytischen Hilfsmitteln der Discussion. Es scheint aber, dass die in den ersten eilf Abschnitten der Lehrsätze entwickelten Mittel sowohl für die Ermittelung der Werthe der fraglichen Unstetigkeiten, wie für den Beweis des betreffenden Theorems selbständig ausreichen.

Wir bestimmen die Lage eines Punkts P im unbegrenzt ausgedehnten Raum durch die drei rechtwinklichen Coordinaten x_1, x_2, x_3. Bezeichnet U eine Function des Orts in diesem Raume, die in allen Theilen desselben als eindeutig, endlich und stetig veränderlich vorausgesetzt wird, so ist der Werth der Function U in jedem bestimmten Punkte P mit dem Grenzwerth derjenigen Werthe vertauschbar welche die Function U in einem veränderlichen Punkte P' annimmt, der dem Punkte P in willkürlicher Weise bis zum Zusammenfallen beider Punkte angenähert wird. Diese Vertauschbarkeit findet nicht mehr statt wenn die Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit der Function U nur in *einzelnen* Theilen des Raums vorausgesetzt wird, welche durch bestimmte Flächen von einander

geschieden sind, insofern es sich um das Verhältniss in Punkten dieser Scheidungsflächen handelt. Für das Folgende wird es nur erfordert den Fall in Betracht zu ziehen, dass diese Theile gebildet seien aus dem von einer einzelnen geschlossenen Fläche S begrenzten Raum und demjenigen Raum der ausserhalb dieser Fläche liegt. Ist eine Function U für jeden *innerhalb* dieser Theile liegenden Punkt P eindeutig, endlich und stetig bestimmt, so wird bei der Annäherung eines veränderlichen Punktes P' an einen bestimmten Punkt P der Grenzfläche S die Function U des Ortes P' sich einem anderen Grenzwerthe nähern können, wenn der Punkt P' nur Punkte des *inneren* Raums durchläuft, als derjenige ist, der erreicht wird, wenn der Punkt P' nur auf einem Wege durch Punkte des *äusseren* Raums zu dem Punkte P geführt wird. Wir werden diese beiden Grenzwerthe durch Hinzufügung der Indices i und a als U^i und U^a von einander unterscheiden, und es wird unanstössig sein, von diesen beiden Werthen den ersteren als den Werth von U auf der *inneren* Seite von S im Punkte P, den zweiten als den Werth von U auf der *äusseren* Seite von S im Punkte P zu bezeichnen.

Wird nunmehr unter der Function U das Potential V einer innerhalb S mit der nach der Stetigkeit veränderlichen Dichtigkeit k vertheilten Masse verstanden, so sind nach den Entwickelungen der eilf ersten Abschnitte der *Lehrsätze* sowohl V selbst, wie auch die drei ersten Derivirten dieser Function nach den Coordinaten des Punktes P im ganzen Raume eindeutige, endliche und stetige Functionen des Orts P oder der Coordinaten x_1, x_2, x_3. Dagegen sind die sechs zweiten Derivirten von V nur endlich stetig und bestimmt in allen Punkten des inneren und äusseren Raums der Fläche S, so nahe diese Punkte auch derselben liegen, nicht aber in Punkten P dieser Fläche selbst. Aber auch die Bestimmtheit dieser zweiten Derivirten von V fällt fort für Punkte P' sowohl des inneren als des äusseren Raums von S, welche einem Punkte P_0 dieser Fläche, in welchem eine bestimmte Normale oder Tangentialebene nicht Statt hat, über jede Grenze genähert gedacht werden. Dieser Umstand ist aus den Grundlagen der von Gauss gegebenen Formeln für diese Derivirten ohne Weiteres ersichtlich, wenngleich ihn Gauss an der betreffenden Stelle nicht besonders hervorhebt.

In Folge der Stetigkeit der ersten Derivirten der Function V in allen Punkten des Raums bestehen unter Annahme der im Vorhergehenden

angenommenen Bezeichnungsweise die drei Gleichungen, welche aus der nachstehenden Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^i = 0$$

durch Einsetzung der Zahlen 1, 2, 3 für den Index λ gebildet werden in jedem Punkte (x_1, x_2, x_3) der Fläche S. Setzt man in diese Gleichung anstatt der Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Coordinaten

$$x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; x_3 + dx_3$$

eines dem Punkte (x_1, x_2, x_3) unendlich nahe benachbarten Punktes dieser Fläche, und subtrahirt sie selbst von der so entstandenen neuen Gleichung, so ergiebt sich offenbar die fernere:

$$(1) \qquad \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_1 + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_2$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_3 = 0,$$

welche in jedem Punkte P der Fläche S für alle Werthe der unendlich kleinen Verschiebungen dx_1, dx_2, dx_3 die zu einem unendlich nahe benachbarten Punkte in dieser Fläche führen, besteht; solche Punkte P_0 ausgenommen, in denen eine bestimmte Normale an die Fläche S nicht Statt hat, in welchen Punkten die angedeuteten zweiten Derivirten ihre Bestimmtheit verlieren. Bezeichnet man durch α_μ den Winkel, welchen die im Punkte P nach der äusseren Seite von S errichtete Normale mit der Axe der x_μ bildet, so folgt aus der Gleichung (1) dass die Coefficienten der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 in derselben den Cosinus der betreffenden Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ proportional sind, und dass daher

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^i = m_\lambda \cos \alpha_\mu$$

wenn m_λ einen von dem ursprünglich gewählten Index λ und den Coordinaten x_1, x_2, x_3 abhängigen Factor bezeichnet. Für die linke Seite vorstehender Gleichung findet die Vertauschbarkeit der Indices λ und μ statt, daher auch für die rechte, und es wird

$$m_\lambda \cos \alpha_\mu = m_\mu \cos \alpha_\lambda$$

6

sein. Es stellen hiernach die gleichen Quotienten

$$\frac{m_\lambda}{\cos\alpha_\lambda} = \frac{m_\mu}{\cos\alpha_\mu}$$

einen von der Wahl der Indices λ oder μ unabhängigen Werth dar, der mit ρ bezeichnet sein möge. Man hat alsdann,

$$m_\lambda = \rho\cos\alpha_\lambda$$

und folglich:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^i = \rho\cos\alpha_\lambda\cos\alpha_\mu. \tag{2}$$

Die Bestimmung der Grösse ρ selbst erfolgt nunmehr sofort aus den Differentialgleichungen denen die Function V für alle Punkte des inneren und des äusseren Raumes von S bis in die unmittelbare Nähe von S genügt. Aus der aus diesen Differentialgleichungen unmittelbar zu folgernden Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)^i + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)^i + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)^i = 4\pi k$$

folgt unter Benutzung der Gleichung (2) für $(\lambda, \mu) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$:

$$\rho = 4\pi k,$$

und hieraus die Bestimmung des Betrags der Unstetigkeit des zweiten auf die Variablen x_λ, x_μ bezüglichen Differentialquotienten von V durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^i = 4\pi k\cos\alpha_\lambda\cos\alpha_\mu. \tag{3}$$

Mit Hilfe der bisherigen Entwickelungen ist es leicht die Giltigkeit des von Gauss an der erwähnten Stelle angedeuteten Theorems zu erweisen.

Bezeichnen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten eines Punktes Π der in einem gegebenen endlichen Flächenstück Σ gelegen ist, $d\sigma$ ein unbestimmtes Element dieses Flächenstücks, ferner x_1, x_2, x_3 die Coordinaten irgend

eines Punktes P im Raume und schliesslich r die Entfernung zwischen Π und P. Alsdann ist das Integral

$$J=\int\frac{hd\sigma}{r}$$

ausgedehnt über alle Elemente des Flächenstücks Σ, in welchem h eine eindeutige, endliche und stetige Function des Ortes in diesem Flächenstück bezeichnet, eine im ganzen Raum eindeutige, endliche und stetige Function der Coordinaten x_1, x_2, x_3. Die Differentialquotienten von J nach diesen Coordinaten sind zwar für alle Punkte P ausserhalb Σ eindeutig, endlich und stetig, dagegen unstetig für Punkte Π innerhalb Σ. Es handelt sich um den Nachweis dieser Unstetigkeiten und um die Bestimmung ihres Betrages.

Wir setzen zunächst voraus, dass das Flächenstück Σ keinen Punkt enthalte, in welchem nicht eine bestimmte Normale an Σ statt hat, deren nach einer gewählten Seite zeigende Richtung mit der Axe der x_λ wiederum den Winkel α_λ bilden möge, und dass in keinem Punkte dieses Flächenstücks $\cos\alpha_1$ verschwinde. Man ergänze, was stets in willkürlicher Weise möglich ist, das Flächenstück Σ durch Hinzufügung eines neuen Stücks Σ' zu einer geschlossenen Fläche S, deren *äussere* Seite in Σ diejenige sei nach welcher die Richtung der Normalen gewählt worden. Innerhalb des von S umschlossenen Raumes vertheile man eine Masse mit der nach der Stetigkeit veränderlichen Dichtigkeit k, bei welcher Vertheilung man k im Übrigen als willkürliche Function des Ortes (x_1, x_2, x_3) innerhalb S wählen kann, wenn man diese Function nur der Bedingung gemäss bestimmt, dass in allen Punkten Π der inneren Seite des ursprünglichen Flächenstücks Σ die Bedingung

$$k=\frac{h}{\cos\alpha_1} \tag{4}$$

erfüllt wird. Ist V das Potential der nunmehr innerhalb S vertheilten Masse in irgend einem Punkte (x_1, x_2, x_3) des Raums, dt ein unbestimmtes Element des von S eingeschlossenen Raumes, η_1, η_2, η_3 seine Coordi-

naten, R der Abstand dieses Elements vom Punkte (x_1, x_2, x_3), so besteht bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\int \frac{k \cos \alpha_1 \, d\sigma}{r} + \int \frac{\partial k}{\partial \eta_1} \frac{dt}{R},$$

in welcher sich das erste Integral über alle Flächenelemente von S, das zweite über alle Raumelemente des von S eingeschlossenen Raums bezieht. Das erste Integral selbst lässt sich zerlegen in den über die Elemente von Σ zu erstreckenden Theil, der der Gleichung (4) zufolge mit J identisch ist, und in den über die Elemente von Σ' zu erstreckenden Theil, welcher durch J' bezeichnet werde. Das über den von S eingeschlossenen Raum erstreckte Integral, welches das Potential einer in diesem Raum mit der Dichtigkeit $\frac{\partial k}{\partial \eta_1}$ vertheilten Masse darstellt, sei schliesslich durch W bezeichnet. Die vorstehende Gleichung geht alsdann über in die folgende:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -J - J' + W.$$

Aus ihr ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda} = -\frac{\partial J}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial J'}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial W}{\partial x_\lambda}.$$

Bezieht man diese Gleichung zunächst auf einen Punkt Π der Fläche Σ welcher der äusseren Seite von Σ angehört, alsdann auf den nämlichen Punkt Π der inneren Seite, und subtrahirt die erhaltenen Resultate, so erhält man in Rücksicht darauf, dass die Differentialquotienten von J' und W im betreffenden Raumtheil durchgängig eindeutig, endlich und stetig sind

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^i = -\left[\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i\right],$$

und mit Hilfe der Gleichung (3)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i = -4\pi k \cos \alpha_1 \cos \alpha_\lambda$$

d. h. in Folge von (4)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i = -4\pi h \cos\alpha_\lambda.$$

Bezeichnet n die Abscisse eines auf der Normale in Π gelegenen Punktes P, so ergiebt sich aus dieser Gleichung ohne Weiteres die folgende:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial n}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial n}\right)^i = -4\pi h,$$

welche das in Rede stehende Theorem ausdrückt. Wenngleich in der Entwickelung desselben vorausgesetzt wurde, dass in der ganzen Ausdehnung von Σ kein Punkt Π vorhanden sei, in welchem nicht eine bestimmte Normale existirte, so ist diese Voraussetzung für das Bestehen des Theorems selbst unwesentlich. Es genügt das Eintreten dieser Voraussetzung in einem *endlichen* den Punkt Π, für den die Unstetigkeit bestimmt werden soll, umgebenden Gebiet von Σ, da die Theile von J welche endlich von Π entfernten Elementen der Fläche Σ entsprechen, zu dieser Unstetigkeit keinen Beitrag liefern. Ebenso unwesentlich erscheint die Voraussetzung des Nichtverschwindens von $\cos\alpha_1$ in allen Punkten von Σ. Sie ist nur erforderlich für Punkte in endlicher Umgebung des betreffenden Punktes Π und stets erfüllt, wenn man unter der Richtung der x_1 diejenige nothwendig existirende Coordinatenrichtung versteht, für welche in diesem Punkte $\cos\alpha_1$ nicht verschwindet. Das Bestehen einer bestimmten Normale in dem betrachteten Punkte erweist sich als die einzige nothwendige und hinreichende Bedingung des Bestehens des in Rede stehenden Theorems, unabhängig von den in diesem Punkte übrigens stattfindenden Krümmungsverhältnissen.

REMARQUES SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Réponse à M. Thomé

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

J'ai publié deux mémoires sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, le premier *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* dans l'American journal of mathematics (t. 7, 1885, p. 203—258), le second *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* dans les Acta Mathematica (t. 8, 1886, p. 295—344). Ces deux mémoires ont inspiré à M. THOMÉ une *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* qu'il a fait imprimer dans le Journal de CRELLE (t. 101, 1887) et que je ne puis laisser sans réponse.

Soit une équation linéaire de la forme suivante:

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

où les P sont des polynômes entiers en x d'un même degré m.

On démontre que pour x très grand, cette équation admet n intégrales de la forme suivante:

$$x^{\rho_i} \phi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

les ϕ étant des séries convergentes doublement infinies procédant suivant les puissances positives et négatives de x. Mais on n'a aucun moyen de déterminer les exposants ρ et les coëfficients des séries ϕ.

D'autre part, on trouve n séries que j'appellerai *séries normales* et qui satisfont *formellement* à l'équation (1). Ces séries, qui sont généralement divergentes, sont de la forme:

$$e^{a_i x} x^{r_i} \varphi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

les φ étant des séries ordonnées suivant les puissances négatives de x. J'ai démontré à ce sujet deux théorèmes.

1°. Pour qu'une série normale soit convergente, il faut et il suffit que la transformée de LAPLACE de l'équation (1) admette une intégrale holomorphe dans tout le plan.

2°. Alors même qu'une série normale diverge, elle représente *asymptotiquement* une des intégrales de l'équation (1), quand x croît indéfiniment avec un argument déterminé.

M. THOMÉ attaque ces deux théorèmes, mais à deux points de vue différents. Quant au premier, il n'en conteste pas l'exactitude, mais il le déclare dénué d'intérêt. C'est là un point sur lequel il est malaisé de discuter.

D'après M. THOMÉ, il est aussi difficile de distinguer si l'équation transformée a une intégrale holomorphe, que de reconnaître si la série normale converge. J'en conviens volontiers, mais j'estime qu'il n'est pas inutile, quand on est en présence de deux problèmes également insolubles, de montrer qu'ils se ramènent l'un à l'autre.

On croirait que M. THOMÉ attendait de moi l'énoncé sous forme explicite des conditions de convergence des séries normales. Il ne dépendait pas de moi de le lui donner; ces conditions s'expriment évidemment par des relations entre les $(n+1)(m+1)$ coefficients des polynômes P; mais ces relations ne sont pas algébriques. Tout ce qu'on peut faire, c'est étudier les transcendantes qui y entrent. En établissant que la convergence se rattache à une propriété du groupe de l'équation transformée, je montrais en même temps que ces transcendantes sont intimement liées à d'autres fonctions que j'ai étudiées dans mon mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (Acta Mathematica, t. 4, 1884, p. 201—311). Les résultats que j'ai donnés au sujet de ces deux classes de transcendantes sont, il est vrai, fort incomplets; mais il est probable qu'on n'en trouvera pas d'autres d'ici à quelque temps; c'est ce qui m'a déterminé à les pu-

blier, tout en partageant les regrets de M. THOMÉ au sujet des lacunes qui y subsistent encore.

Quant au second théorème, M. THOMÉ le regarde comme faux, et cela parce qu'il l'interprète de la façon suivante:

Ce serait toujours la même intégrale qui serait représentée asymptotiquement par la même série normale, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment; d'où il résulterait que les exposants r_i devraient être égaux aux exposants ρ_i.

Je n'ai jamais dit une pareille bêtise et M. THOMÉ me la prête gratuitement. Le § 5 du mémoire de l'American Journal est tout entier destiné à démontrer le contraire et j'ai encore répété le contraire à plusieurs reprises dans le mémoire des Acta Mathematica, et en particulier dans les deux dernières lignes de la page 309 et les huit premières lignes de la page 310.

En ce qui concerne ces dix lignes, je reconnais que j'aurais mieux fait de les souligner; mais, quant au § 5, je ne pouvais imaginer qu'un paragraphe tout entier échappât au lecteur le plus inattentif.

Je prévois la réponse de M. THOMÉ; mais, dira-t-il, si vous ne pouvez nous donner explicitement la valeur des exposants ρ, votre travail est dénué d'intérêt. J'en suis fâché, mais cette détermination explicite est impossible; on est obligé de se contenter de procédés d'approximations indéfinies et c'est ce que j'ai fait en définitive, dans le § 5, en ramenant le problème à la détermination du groupe d'une équation linéaire, question que j'avais traitée, quoique d'une façon incomplète, dans le mémoire cité des Acta Mathematica (t. 4).

Paris, le 24 Juillet 1887.

SUR UNE CLASSE DE FORMES DE DIFFÉRENTIELLES

ET SUR LA

THÉORIE DES SYSTÈMES D'ÉLÉMENTS[1]

PAR

G. KOENIGS

À PARIS.

1. On sait combien il est avantageux pour certaines recherches géométriques d'adopter comme élément générateur de l'espace, non plus le point, mais une courbe ou une surface dépendant d'un certain nombre de paramètres. Les cas où l'on adopte pour élément les droites ou bien les sphères de l'espace ont été particulièrement étudiés, à cause principalement des résultats remarquables auxquels ils conduisent dans la théorie générale des surfaces. La droite et la sphère dépendent de quatre paramètres u_1, u_2, u_3, u_4. Le contact de deux sphères infiniment voisines s'exprime par l'évanouissement d'une certaine forme quadratique des différentielles du_1, du_2, du_3, du_4, dont les coefficients, quoique contenant généralement u_1, u_2, u_3, u_4 peuvent cependant, par un choix convenable des variables, être amenés à être constants. Un fait tout pareil se rencontre lorsque l'on prend pour élément la droite, avec cette seule différence, que la notion de contact doit y être remplacée par une autre, à savoir *la rencontre de deux droites infiniment voisines.*

[1] Ces recherches ont été l'objet de deux notes présentées à l'Académie des sciences de Paris en Mars 1887.

Soit, dans l'un et l'autre de ces deux cas, $M(u\,|\,du)$ la forme quadratique, dont les coefficients dépendront généralement des u. Cette forme quadratique admet une forme adjointe que nous représenterons par

$$\mathfrak{M}(u\,|\,T),$$

et alors, toute fonction $\theta(u_1, u_2, u_3, u_4)$ donne lieu à un paramètre différentiel, qui possède la propriété d'invariance relativement à une transformation quelconque effectuée sur les paramètres u; cet invariant est la fonction

$$\mathfrak{M}\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right).$$

L'évanouissement de cet invariant exprime la condition nécessaire et suffisante pour que, si entre les quatre paramètres u on établit la relation $\theta = 0$, le complexe de droites ou de sphères défini par cette équation soit formé, dans le cas des droites, de droites tangentes à une surface ou rencontrant une courbe fixe, et, dans le cas des sphères, de sphères tangentes à une surface ou bien à une courbe.

2. L'objet de ce travail est d'étendre ces divers résultats au cas d'un élément quelconque. La condition de contact de deux éléments infiniment voisins, si ces éléments sont des surfaces, ou bien leur rencontre, si ces éléments sont des courbes, s'exprime par l'évanouissement d'une forme des $(n+1)$ différentielles des $(n+1)$ paramètres dont dépend l'élément. Cette forme *fondamentale* $M(u\,|\,du)$ n'est pas nécessairement quadratique, et ne dérive pas non plus nécessairement d'une forme à coefficients constants. Il s'en faut cependant qu'une forme de différentielles prise au hasard puisse toujours être considérée comme la forme fondamentale correspondant à un certain système d'éléments. Dès que le nombre des paramètres est supérieur à quatre, la forme $M(u\,|\,du)$ présente des particularités caractéristiques, en sorte qu'il y a lieu de poser d'abord le problème suivant: *Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes une forme de différentielles peut-elle être la forme fondamentale pour un élément convenablement choisi? Construire le type général de ces formes.*

Après avoir complétement résolu cette question, je passe à la question suivante qui en est le complément naturel:

Sachant qu'une forme $M(u\,|\,du)$ peut jouer le rôle de forme fondamen-

tale, trouver tous les systèmes d'éléments qui l'admettent en effet pour forme fondamentale.

Je résouds encore cette question et je parviens ainsi au théorème suivant:

Si deux systèmes d'éléments donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe une transformation de contact qui transforme l'un dans l'autre ces deux systèmes d'éléments.

Par exemple, la forme $du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2$ est fondamentale pour la droite et pour la sphère prise pour éléments. Il doit donc exister une transformation de contact transformant la géométrie de la droite dans celle de la sphère. Il y a longtemps que Mr S. Lie a découvert une telle transformation.

Si l'on dit de tous les systèmes d'éléments transformables les uns dans les autres par des transformations de contact, qu'ils forment un groupe, de même que l'on dit que des formes de différentielles forment un groupe lorsqu'elles sont transformables les unes dans les autres par un simple changement de variables, on voit qu'à tout groupe d'éléments correspond un groupe de formes et inversement, sous la réserve que ces formes vérifient les conditions auxquelles sont assujetties les formes fondamentales. Il y a lieu alors de distinguer les groupes d'éléments en deux classes. A la première appartiendront les groupes qui ne contiennent que des systèmes d'éléments-surfaces, et aucun système d'éléments-courbes; à la seconde classe appartiendront les groupes qui contiennent un système d'éléments-courbes, auquel cas il y a évidemment dans le groupe une infinité de pareils systèmes. Le groupe qui comprend les sphères de l'espace est, par exemple, de la seconde classe, puisque le système des droites de l'espace fait, d'après Lie, partie de ce même groupe.

Après avoir donné le caractère distinctif des formes principales des groupes de la seconde classe, je traite deux cas particuliers, celui où la forme fondamentale est quadratique, et celui où ses coefficients sont constants, pour lesquels la solution est immédiate. Je démontre à ce sujet un théorème général, qui me paraît devoir conduire à l'étude plus générale des formes fondamentales de degré donné. Il semble résulter de ce théorème que le degré de la forme limite nécessairement le nombre des paramètres dont peut dépendre l'élément. Ainsi lorsque la forme est quadratique le nombre des paramètres ne peut être plus élevé que 4.

Etude du cas où l'élément est une surface.

3. Supposons que l'on ait pris pour élément une surface dépendant de $(n+1)$ paramètres, et dont l'équation sera en coordonnées rectilignes, x, y, z:

$$z = \varphi(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = \varphi(x, y \,|\, u); \tag{1}$$

posons aussi

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et θ étant une fonction quelconque des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, convenons de représenter par $\boxed{\theta, t}$ l'expression

$$\boxed{\theta, t} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} t_1 + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} t_2 + \cdots + \frac{\partial \theta}{\partial u_{n+1}} t_{n+1},$$

où les t_i sont des quantités quelconques.

En exprimant que la surface (u) et la surface infiniment voisine $(u + du)$ se touchent au point x, y, z, on trouve les équations

$$\left|\begin{array}{l} \boxed{\varphi, du} = 0 \\ \boxed{p, du} = 0 \\ \boxed{q, du} = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

En éliminant x, y entre ces équations, on trouve une forme homogène des différentielles du, dont les coefficients dépendent des u. Je désigne par $M(u \,|\, du)$ cette forme, qui n'est définie qu'à un facteur près, indépendant des différentielles.

Au lieu des du introduisons des quantités finies $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$, et considérons la forme

$$M(u \,|\, t)$$

qui proviendra de l'élimination de x, y entre les équations

$$\begin{array}{l} \boxed{\varphi, t} = 0 \\ \boxed{p, t} = 0 \\ \boxed{q, t} = 0. \end{array}$$

Ces équations peuvent encore s'écrire,

$$(3) \qquad \begin{cases} \boxed{\varphi, t} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\boxed{\varphi, t} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\boxed{\varphi, t} = 0. \end{cases}$$

4. Pour interpréter ces équations nous ferons usage de la considération des espaces à plusieurs dimensions. Les quantités u seront regardées comme constantes, et les t seront les coordonnées linéaires homogènes d'un point d'un espace à n dimensions. Une équation homogène entre les t définit un espace à $(n - 1)$ dimensions, que l'on peut appeler une surface et que je représenterai par le symbole E^{μ}_{n-1}, où μ est le degré de l'équation qui lie les coordonnées t d'un point quelconque de cet espace. Si en particulier $\mu = 1$, l'équation est linéaire et l'on a un espace linéaire à $(n - 1)$ dimensions E^1_{n-1}, que l'on peut appeler un plan. Deux équations linéaires représentent un espace linéaire à $(n - 2)$ dimensions, que je représenterai par E^1_{n-2}; plus généralement, k équations linéaires homogènes entre les t définissent un espace linéaire à $(n - k)$ dimensions, E^1_{n-k}. Un point unique peut être regardé comme un espace linéaire de 0 dimensions E^1_0. Je laisse de côté les espaces E^{μ}_{n-k} à $(n - k)$ dimensions et non linéaires (du degré μ) dont la considération ne nous sera pas utile.

Si l'on se reporte à l'espace ordinaire à trois dimensions, on sait que les surfaces E^{μ}_2 de cet espace se divisent en deux catégories. Pour les surfaces d'une catégorie, les plans tangents sont doublement indéterminés, comme le point de contact; mais pour les surfaces de la seconde catégorie, dites développables, le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre, il est simplement indéterminé, et il est le même pour tous les points d'un même espace linéaire à une dimension E^1_1 (génératrice de contact). Des faits tout pareils se retrouvent dans le cas d'un espace quelconque, mais avec plus de variété.

Il y a, en effet, dans l'espace à n dimensions $(n - 1)$ catégories de surfaces. Pour les unes le plan tangent dépend de $(n - 1)$ paramètres, comme le point de contact; c'est le cas général. Mais pour d'autres le

plan tangent dépend de $(n-2), (n-3), \ldots$ de 2 ou même seulement d'un seul paramètre. Il est facile de se rendre compte de la génération de ces surfaces. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de celles dont le plan tangent dépend de $(n-k)$ paramètres; on écrira l'équation

$$\text{(e)} \qquad \theta = T_1 t_1 + T_2 t_2 + \ldots + T_n t_n + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

où les T_i dépendent de $(n-k)$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$, et l'on cherchera l'enveloppe de ce plan, en éliminant les $(n-k)$ quantités α_i entre les $(n-k+1)$ équations

$$\text{(e')} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} = 0, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_{n-k}} = 0, \qquad \theta = 0.$$

On obtiendra ainsi la surface la plus générale dont le plan tangent dépend de $(n-k)$ paramètres, et l'on aperçoit tout de suite que le plan tangent est le même dans tous les points de l'espace à $k-1$ dimensions E^1_{k-1}. représenté par les $n-k+1$ équations (e'). Donc, lorsqu'une surface E^μ_{n-1} est telle que ses plans tangents soient $(n-k)$ fois indéterminés, elle est le lieu d'un espace linéaire E^1_{k-1} à $k-1$ dimensions, en tous les points duquel le plan tangent est le même.

On voit que lorsque l'on parle de surface dans l'espace à n dimensions, il y a lieu d'apporter une indication spéciale portant sur l'indétermination du plan tangent. Par exemple $E^\mu_{n-1,n-k}$ représentera un espace d'ordre μ à $(n-1)$ dimensions dont le plan tangent est $(n-k)$ fois indéterminé.

5. Revenons maintenant aux équations (3). L'élimination est celle que l'on effectuerait pour trouver la surface $E^\mu_{n-1,2}$ enveloppe du plan à 2 paramètres x, y représenté par l'équation

$$\boxed{\varphi, t} = 0,$$

qui est linéaire par rapport aux coordonnées t.

Il suit de là que:

Dans l'espace à n dimensions dont les t sont les coordonnées ponctuelles linéaires, l'équation

$$M(u\,|\,t) = 0,$$

où les u sont regardés comme constants, représente une surface $E^{\mu}_{n-1,2}$, *dont les plans tangents sont seulement deux fois indéterminés.*

Lorsque $n + 1 = 4$, ce fait ne constitue pas une exception; mais si $n + 1 > 4$ on est en présence d'une véritable singularité, qui est, comme nous le verrons, caractéristique des formes considérées.

Si l'on représente par $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ les coefficients de l'équation du plan tangent de la surface $M(u|t)$, on aura, en comparant à la première des équations (3)

$$(4) \qquad \frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

et en éliminant x, y entre ces n équations on tombera sur $(n - 2)$ équations homogènes entre les quantités T, dont les coefficients dépendront des u, et que nous écrirons,

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_1(u|T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u|T) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u|T) = 0. \end{cases}$$

Puisque le plan tangent à la surface $M(u|t) = 0$ ne contient que deux paramètres il devait, à priori, exister $(n - 2)$ relations entre les coefficients de ce plan, ces relations sont précisement les équations (5).

Une forme quelconque de $(n + 1)$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ étant donnée, on sait qu'il existe une forme étroitement liée à la première, qui contient les coefficients $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ d'une forme linéaire, et dont l'évanouissement exprime le contact du plan représenté par cette forme linéaire avec la surface représentée par la forme proposée elle-même. Cette seconde forme s'appelle la *forme adjointe.*

On voit cependant que l'on ne peut plus parler de forme adjointe du moment que le plan tangent à la surface représentée par la forme contient moins de $(n - 1)$ paramètres; s'il en contient $(n - k)$, *il faut k équations* pour exprimer le contact d'un plan avec la surface, et au lieu d'une forme adjointe unique on a un *système adjoint* de k formes.

Dans le cas actuel, la forme $M(u|t)$ *se trouve donc caractérisée par*

ce fait qu'elle admet un système adjoint composé de $(n-2)$ *formes, à savoir le système des premiers membres des équations* (5).

Dans le cas de $n+1=4$, le système se réduit à une forme unique, et on n'a dès lors aucune singularité, mais si $n+1>4$, le système (5) comporte plusieurs équations. Il en résulte donc déjà que du moment que $n+1>4$ on ne peut chercher les formes fondamentales relatives à tous les éléments imaginables, que parmi celles qui ont un système adjoint comprenant $(n-2)$ formes simultanées.

6. Ce caractère *purement algébrique* que doit présenter la forme $M(u\,|\,du)$ n'est pas cependant suffisant; nous allons voir qu'elle doit présenter encore un autre caractère exceptionnel, où l'on tient compte du mode de composition des coefficients de la forme au moyen des variables u, dont il a été jusqu'ici fait abstraction.

D'après la définition même des équations (5) on a identiquement

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

en sorte que le système des $(n-2)$ équations différentielles simultanées

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

admet la solution $\varphi(x\,,y\,|\,u)-z$, où $x\,,y\,,z$ sont considérés comme 3 constantes.

Le système des équations (6) admet donc une solution contenant un nombre de constantes égal à l'excès du nombre $(n+1)$ des variables in-

dépendantes sur le nombre $(n - 2)$ de ces mêmes équations; et l'on peut dire ainsi, en étendant une locution usitée pour les équations linéaires, que les équations (6) forment un système complet. Les conditions auxquelles sont soumis les coefficients de la forme $M(u|du)$ ne sont donc autres que celles qui expriment, conformément aux théories connues, la compatibilité des équations (6).

7. Ces conditions caractérisent entièrement la forme $\mathfrak{M}(u|du)$ comme le prouve la réciproque suivante.

Soit un système de $(n - 2)$ équations différentielles homogènes

$$\text{(E)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array} \right.$$

assujetti à la seule condition de former un système complet, c'est-à-dire, d'admettre une solution complète douée de trois constantes, dont une nécessairement additive à la fonction θ.

Je dis que le système des fonctions

$$\text{(E')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u \mid T) \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) \end{array} \right.$$

constitue le système adjoint d'une forme fondamentale, qui est même fondamentale pour une infinité de systèmes d'éléments.

Formons d'abord la forme à laquelle le système (E') est adjoint; pour cela nous prenons dans l'espace à n dimensions (dont les t_i sont des coordonnées linéaires ponctuelles) le plan

$$T_1 t_1 + \ldots + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

où les T_i sont liés par les $(n - 2)$ équations

$$(\text{E}'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0 \end{array} \right.$$

et nous cherchons l'enveloppe de ce plan, qui se trouve représentée par une forme $M(u \mid t)$. Cette forme est la forme cherchée. En y remplaçant les t par des différentielles du, nous obtenons la forme $M(u \mid du)$. Il faut prouver que cette forme est une forme fondamentale.

Soit en effet

$$\varphi(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) - z$$

une solution complète du système (E), où x, y, z représentent les trois constantes, dont l'une est nécessairement additive à θ, puisque θ ne figure pas explicitement dans les équations différentielles. Si l'on considère x, y, z comme des coordonnées linéaires dans l'espace à trois dimensions, et que l'on adopte pour élément la surface à $(n + 1)$ paramètres

$$\varphi(x, y \mid u) - z = 0,$$

la forme $M(u \mid du)$ sera la forme fondamentale correspondante à ce système d'éléments. Car si l'on veut former le système adjoint à la forme fondamentale relative à cet élément, on doit, comme on l'a vu, éliminer x, y entre les équations

$$\frac{T_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

d'après l'hypothèse faite que $\varphi(x, y \mid u) - z$ vérifie le système (E), cette élimination donnera lieu au système d'équations (E''), en sorte que la forme fondamentale aura le système (E') pour système adjoint, et coïncidera, par conséquent, avec la forme $M(u \mid du)$.

Maintenant, comme l'on peut adopter toute autre forme de solution complète du système (E), on obtiendra autant de systèmes d'éléments,

admettant la forme fondamentale $M(u\,|\,du)$, qu'il y a de solutions complètes distinctes, c'est-à-dire une infinité.

On pouvait déjà prévoir l'existence d'une infinité de systèmes d'éléments donnant lieu à la même forme fondamentale; car si l'on effectue une transformation de contact sur l'espace à trois dimensions, un système de surfaces à $(n + 1)$ paramètres se transforme en un système analogue; et si deux surfaces se touchent, leurs transformées se touchent également. L'évanouissement de la forme $M(u\,|\,du)$ qui exprime le contact de deux surfaces infiniment voisines exprime donc aussi le contact de leurs transformées, qui sont également infiniment voisines. Nous pouvons ainsi regarder comme formant un groupe tous les systèmes de surfaces qui dérivent les uns des autres par des transformations de contact, de même que l'on regarde comme formant un groupe toutes les formes de différentielles qui dérivent les unes des autres par un simple changement de variables. On dit aussi que ces formes sont *équivalentes*. Cela posé, nous allons démontrer la proposition réciproque suivante.

Si deux éléments dépendant d'un même nombre de paramètres donnent lieu à la même forme fondamentale, ou bien à deux formes fondamentales équivalentes, ces deux éléments font partie d'un même groupe, c'est-à-dire, que l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.

Ce théorème, que nous énonçons ici dans le cas des surfaces, subsiste dans le cas où l'élément est une courbe, comme nous le verrons plus loin.

8. Pour démontrer cette proposition nous remarquons que les deux systèmes d'éléments considérés doivent correspondre chacun à une solution complète du système (E), et nous n'avons dès lors qu'à étudier le passage d'une solution complète à une autre solution complète.

Ceci nous conduit à étudier de plus près les solutions du système (E), en partant de ce fait qu'il admet au moins une solution contenant trois constantes, dont une nécessairement doit être additive. Soit alors $\Phi + \gamma$ cette solution complète, donnée par l'équation

$$(V) \qquad V(\alpha\,,\,\beta\,,\,\Phi + \gamma\,,\,u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_{n+1}) = 0,$$

où $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma$ sont les trois constantes. On voit que les $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$ seront proportionnelles aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, et, par suite, les équations suivantes

$$(\varepsilon)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

seront vérifiées en vertu de $V = 0$, c'est-à-dire si l'on transporte dans ces équations la valeur de Φ, tirée de l'équation $V = 0$. D'après cela les équations (ε) étant vérifiées pour toutes valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ et de α, β, γ, le seront encore si ces trois dernières quantités, au lieu d'être constantes dépendent des u et d'autres quantités. Si nous posons alors

$$\alpha = \xi(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta) = \xi(u \,|\, \theta)$$
$$\beta = \eta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta) = \eta(u \,|\, \theta)$$
$$\gamma = \zeta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta) = \zeta(u \,|\, \theta)$$

où ξ, η, ζ sont trois fonctions arbitraires, et θ une quantité quelconque, l'équation

$$V\big(\xi(u \,|\, \theta), \eta(u \,|\, \theta), \zeta(u \,|\, \theta), u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\big) = 0$$

définira θ en fonction des u; et par un choix convenable de ξ, η, ζ on pourra faire en sorte que θ représente telle solution que l'on voudra du système des équations compatibles (E). C'est là un fait bien connu dans la théorie des équations différentielles. Différentions l'équation $V = 0$ et dans la différentielle totale de ξ distinguons deux parties; l'une provenant de la variation des u et l'autre de la variation de θ, en sorte que

$$d\xi = \delta\xi + \frac{\partial \xi}{\partial \theta} d\theta;$$

nous aurons, en différentiant

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial V}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\delta\zeta + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right)d\theta$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial V}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial u_{n+1}}du_{n+1} = 0.$$

Exprimons qu'ici encore, comme pour la fonction Φ, les $\frac{\partial\theta}{\partial u_i}$ sont proportionnels aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, nous aurons nécessairement

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial V}{\partial\xi}\delta\xi+\frac{\partial V}{\partial\eta}\delta\eta+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\delta\zeta=0.$$

Supposons ξ, η, ζ choisis de sorte que l'équation (α) ait lieu, les $\frac{\partial\theta}{\partial u_i}$ étant proportionnels aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, vérifieront les équations (E), eu égard aux équations (ε), et cela en vertu de l'équation $V=0$, c'est-à-dire que θ sera une solution du système (E).

On sait, de plus, ainsi que je l'ai dit déjà, que toute solution du système (E) peut s'engendrer de cette façon, sauf les singularités que j'écarte. Tout revient donc à vérifier l'équation (α). Cette équation exprime que si l'on considère ξ, η, ζ comme des fonctions des u, la quantité θ jouant le rôle de constante, il existe entr'elles une ou plusieurs relations. De là trois cas à distinguer.

1°. S'il existe *trois relations*, en se rappelant que θ joue le rôle de constante, ξ, η, ζ seront trois fonctions de θ,

$$\xi=\xi(\theta),\qquad \eta=\eta(\theta),\qquad \zeta=\zeta(\theta),$$

et la fonction θ sera définie par l'équation

$$V(\xi(\theta), \eta(\theta), \zeta(\theta)\,|\,u)=0.$$

2°. S'il existe deux relations on pourra les écrire

$$\eta=f(\xi, \theta),\qquad \zeta=g(\xi, \theta)$$

et l'équation (α) donne alors

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial f}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial\zeta}\frac{\partial g}{\partial\xi}=0.$$

On éliminera ξ, η, ζ entre ces trois équations et l'équation $V=0$; le résultant sera une équation entre θ et les u, qui définira θ comme fonction de ces variables.

3°. Enfin dans le cas d'une seule relation

$$\zeta=f(\xi, \eta, \theta),$$

l'équation (α) se décomposera dans ces deux

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

et on éliminera encore ξ, η, ζ entre ces équations et $V = 0$, pour obtenir l'équation qui donne θ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

Imaginons, par exemple, qu'il s'agisse de passer d'une solution complète Φ donnée par l'équation

$$V(\alpha, \beta, \Phi + \gamma, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0$$

à une autre Ω donnée par l'équation

$$W(\alpha', \beta', \Omega + \gamma', u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0,$$

où α, β, γ et α', β', γ' sont respectivement les constantes qui doivent figurer dans ces intégrales.

Ce passage s'effectuera suivant l'une des trois manières ci-dessus rappelées.

1°. S'il y a trois relations, on devra poser

$$\alpha = f(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega),$$

$$\beta = g(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega),$$

$$\gamma = h(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega),$$

en sorte que le passage de

$$V(\alpha, \beta, \gamma \mid u) = 0$$

à

$$W(\alpha', \beta', \gamma' \mid u) = 0$$

s'effectuera par la transformation

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \begin{cases} \alpha = f(\alpha', \beta', \gamma') \\ \beta = g(\alpha', \beta', \gamma') \\ \gamma = h(\alpha', \beta', \gamma'). \end{cases}$$

2°. S'il y a deux relations, on devra avoir

$$\beta = f(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega, \alpha)$$
$$\gamma = g(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega, \alpha)$$

et on adjoindra l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0.$$

On passera donc de $V(\alpha, \beta, \gamma | u) = 0$ à $W(\alpha', \beta', \gamma' | u) = 0$ en portant dans V les valeurs des α, β, γ tirées des équations

$$(\mathrm{T}_2) \qquad \left|\begin{array}{l} \beta = f(\alpha', \beta', \gamma', \alpha) \\ \gamma = g(\alpha', \beta', \gamma', \alpha) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial \beta}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}. \end{array}\right.$$

3°. De même, dans le cas d'une seule équation, on verra qu'on passe de $V(\alpha, \beta, \gamma | u)$ à $W(\alpha', \beta', \gamma' | u)$ en portant dans V les valeurs de α, β, γ tirées des équations

$$(\mathrm{T}_3) \qquad \left|\begin{array}{l} \gamma = f(\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta) \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \beta} + \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}\dfrac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \end{array}\right.$$

Interprétons ces résultats. Si dans l'équation

$$V(\alpha, \beta, \gamma | u) = 0$$

on regarde α, β, γ comme des coordonnées, on obtient une famille de surfaces dépendant des $(n + 1)$ paramètres u; de même

$$W(\alpha', \beta', \gamma' | u) = 0$$

représente une seconde famille de surfaces, et d'après les hypothèses faites, ces deux familles constituent deux systèmes d'éléments quelconques parmi ceux qui donnent lieu à une même forme fondamentale, à savoir, celle qui correspond aux équations (E).

Or les trois transformations (T_1), (T_2), (T_3) par l'une desquelles on peut certainement passer d'un système à l'autre représentent évidemment les trois classes de transformations de contact relatives à l'espace à trois dimensions.

Le théorème énoncé au numéro **8** se trouve donc complétement démontré.

Et la relation entre *les groupes de systèmes d'éléments* et *les classes de formes fondamentales* se trouve ainsi entièrement établie.

9. Cherchons maintenant à interpréter les solutions du système (E) sous une forme différente.

Nous venons de voir qu'un changement de solution complète est équivalent à une transformation de contact de l'élément. Nous allons étudier l'équation $V = 0$ à un autre point de vue.

Si dans l'équation

$$V(x, y, z \,|\, u) = 0$$

on regarde x, y, z comme donnés, l'équation $V = 0$ est celle qui lie les u de toutes les surfaces du système qui passent par un point donné. On en conclut donc que si l'équation

$$\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0$$

assujettit la surface (u) à passer par un point donné, la fonction $\theta(u)$ vérifie le système des équations (E). Cette proposition se généralise ainsi:

Si l'équation $\theta = 0$ est telle que les surfaces (u) qui la vérifient touchent une surface ou une courbe fixe, ou passent par un point fixe, les équations (E) *sont vérifiées par la fonction θ, soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta = 0$.*

En effet, soit S une surface fixe; on peut toujours trouver une transformation de contact telle que toutes les surfaces de l'espace qui touchent S aient pour transformées des surfaces passant par un point fixe. Si on applique alors cette transformation, la condition $\theta = 0$ qui exprime le contact des surfaces (u) avec la surface S, exprime que les surfaces transformées passent par un point fixe. Le système (E) n'étant pas modifié par la transformation, il en résulte que θ doit vérifier les équations (E). La même démonstration s'applique au cas où l'on assujettit les surfaces (u) à toucher une courbe fixe.

Voici maintenant la réciproque de cette proposition.

Si la fonction $\theta(u)$ vérifie les équations (E) *soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta = 0$, cette dernière équation exprime que les surfaces (u) qui la vérifient touchent une courbe ou une surface fixe, ou bien passent par un point fixe.*

En effet, toute fonction θ de l'espèce considérée dérive d'une fonction (solution complète) telle que $W(x', y', z' | u)$ dans laquelle x', y', z' ont reçu des valeurs numériques déterminées, x'_0, y'_0, z'_0, en sorte que

$$W(x'_0, y'_0, z'_0 | u) = \theta(u);$$

si l'on effectue la transformation de contact qui consiste à prendre pour élément les surfaces $W(x', y', z' | u) = 0$, l'équation $\theta = 0$ exprime que les surfaces W qui la vérifient passent un point (x'_0, y'_0, z'_0). Les surfaces primitives $V = 0$ touchent donc une courbe ou une surface fixe, ou bien elles passent par un point fixe.[1]

Examen du cas où l'élément est une courbe.

10. Si l'élément est une courbe dépendant de $(n + 1)$ paramètres, il est facile de ramener ce cas à celui où l'élément est une surface; il suffit d'effectuer une transformation de contact arbitraire (non ponctuelle). On obtient ainsi des surfaces dépendant de $(n + 1)$ paramètres, auxquelles on peut appliquer tous les résultats précédents. On formera ainsi la forme $M(u | du)$ et le système adjoint de cette forme; il ne restera plus qu'à interpréter le rôle de ces diverses fonctions dans le langage des courbes. Les transformations de contact transforment la rencontre de deux courbes dans le contact des deux surfaces correspondants et inversement. Il suit de là que l'évanouissement de la forme $M(u | du)$ exprimera la rencontre des deux courbes infiniment voisines (u) et $(u + du)$.

---

[1] Ainsi qu'on va le voir, tous ces résultats s'étendent d'eux-mêmes au cas où l'élément est une courbe. Dans le cas particulier où l'élément est une droite, on a ce théorème de M. KLEIN (Mathematische Annalen, t. 5), que lorsque le paramètre différentiel du premier ordre d'un complexe est nul, ce complexe est formé des sécantes d'une courbe ou des tangentes d'une surface. Dans le mémoire précité, M. KLEIN n'a pas complété sa démonstration, et je ne crois pas qu'elle ait été reprise par personne, si ce n'est dans mon travail *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Annales de l'école normale, 2ème série, t. 11).

Ce qui précède fournit une nouvelle démonstration de cet important théorème.

Si la fonction $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ vérifie les équations (E) identiquement ou en vertu de $\theta = 0$, cette dernière équation exprime que les surfaces transformées touchent une surface fixe ou une courbe fixe, ou bien qu'elles passent par un point fixe. Les courbes primitives doivent donc toucher une surface fixe, ou bien couper une courbe fixe.

On retrouve ainsi une extension fort générale du théorème que M. Klein a fait connaître pour le cas des complexes de droites. D'après M. Klein, pour que le complexe $\theta = 0$ soit formé des tangentes d'une surface ou des sécantes d'une courbe, il faut et il suffit que l'invariant $\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right)$ soit nul.

Or, dans le cas des droites, on a $n + 1 = 4$ et $n - 2 = 1$; le système adjoint se réduit précisément à la forme $\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right)$.

11. Ce qui précède montre assez qu'il n'y a pas de distinction fort essentielle à faire entre le cas où l'élément est une surface, et celui où l'élément est une courbe. Il suffit, par une transformation de contact, de transformer en surfaces les courbes du système pour pouvoir appliquer les résultats ci-dessus démontrés.

On a vu, par exemple, que si deux éléments donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe une transformation de contact qui les transforme l'un dans l'autre. Ce théorème n'a été démontré que dans le cas où l'élément est une surface. Il s'étend de lui-même au cas des courbes.

Soit un système Γ de courbes et un système Σ de surfaces qui donnent lieu à la même forme fondamentale. Une transformation de contact T transforme Γ en un système $T\Gamma$ de surfaces. Le système $T\Gamma$ de surfaces et le système Σ donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe donc une transformation de contact T' qui transforme $T\Gamma$ en Σ, en sorte que $T'T\Gamma = \Sigma$; on en conclut que si l'on transforme successivement Σ par les transformations de contact T'^{-1}, T^{-1} inverses de T' et de T on reproduit Γ; ou enfin, que Γ et Σ sont transformables l'un dans l'autre par une transformation de contact, attendu que le produit de deux transformations de contact est une transformation de contact.

Par exemple, on sait que par un choix convenable des coordonnées la sphère et la droite donnent lieu à la forme fondamentale

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2.$$

Il existe donc une transformation de contact qui change la sphère en droite. Mr SOPHUS LIE a depuis longtemps donné cette remarquable transformation, dont l'usage est si fécond pour la théorie générale des surfaces.

Distinction entre le cas des courbes et celui des surfaces.

12. Malgré la grande similitude entre le cas où l'élément est une courbe et celui où l'élément est une surface, malgré qu'une transformation de contact permette toujours de passer du premier cas au second, il existe néanmoins des particularités dans le cas où l'élément est une courbe, particularités qui tiennent à ce *qu'un système de surfaces ne peut généralement pas se transformer en un système de courbes* par une transformation de contact, même convenablement choisie.

Nous avons déjà dit que nous regardions comme équivalents, ou formant un groupe, tous les systèmes d'éléments qu'une transformation de contact transforme les uns dans les autres. Ce qui précède fait voir assez que nous n'excluons pas le cas où le groupe contient un système de courbes, auquel cas il en comprend une infinité. Mais alors nous sommes conduits à diviser ces groupes en deux classes. Un groupe de la première classe ne comprendra comme éléments que des surfaces, qu'il sera impossible de ramener à des courbes; à la seconde classe appartiendront les groupes qui comprennent un système de courbes, et par suite une infinité de ces systèmes.

Nous avons déjà vu que chaque groupe est caractérisé par une classe de formes fondamentales, c'est-à-dire de formes qui dérivent toutes les unes des autres par un changement de variables.

Le problème qui se présente maintenant est donc celui-ci, *qu'est ce qui caractérise les formes dont le groupe d'éléments correspondant est de la seconde classe?*

Nous allons traiter ce problème dans lequel on verra intervenir, non sans intérêt, ces systèmes simultanés d'équations différentielles dits *semi-linéaires* dont la notion est due à Mr S. LIE.

13. Nous prendrons les équations des courbes considérées comme élément, sous la forme

$$\begin{cases} x = f(z\,,\,u_1\,,\,u_2\,,\ \ldots\,,\ u_{n+1}) = f(z\,|\,u) \\ y = \varphi(z\,|\,u). \end{cases}$$

Si les courbes (u), $(u + du)$ se coupent au point x, y, z, on a, en reprenant une notation précédente,

$$\left|\begin{array}{l} \boxed{f, du} = 0 \\ \boxed{\varphi, du} = 0, \end{array}\right.$$

d'où l'on déduira la forme $M(u \,|\, du)$ par l'élimination de z. Ou encore, on obtiendra la forme $M(u \,|\, t)$ en éliminant z entre les équations

$$\text{(a)} \qquad \left|\begin{array}{l} \boxed{f, t} = 0 \\ \boxed{\varphi, t} = 0. \end{array}\right.$$

Cherchons le système adjoint de la forme M. Pour cela, je différentie totalement les équations ci-dessus, en regardant les u comme constants. Il vient

$$\frac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z} dz + \boxed{f, dt} = 0$$

$$\frac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z} dz + \boxed{\varphi, dt} = 0$$

d'où, en posant

$$\text{(b)} \qquad -\lambda = \frac{\dfrac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z}},$$

on conclut

$$\boxed{f, dt} + \lambda \boxed{\varphi, dt} = 0,$$

en sorte qu'on a

$$\text{(c)} \qquad \frac{T_1}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_{n+1}} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

$T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ désignant les coefficients du plan tangent à la surface E_{n-1}'' représentée par

$$M(u \,|\, t) = 0$$

dans l'espace à n dimensions dans lequel les t_i sont les coordonnées linéaires ponctuelles.

Ce plan tangent dépend de deux paramètres λ et z, comme dans le cas général étudié au début. Mais ici se place une remarque nouvelle.

14. Précédemment, notre surface E^{μ}_{n-1} se trouve être le lieu d'un espace linéaire E^{1}_{n-2}, en tous les points duquel le plan tangent est le même. Mais ici il y a plus; la surface E^{μ}_{n-1} est, d'après les équations (a), le lieu d'un espace linéaire à E^{μ}_{n-2} dimensions, et tout plan mené par l'un de ces espaces générateurs touche la surface en tous les points d'un espace linéaire à trois dimensions, représenté par les équations (a) (b), où λ a reçu une valeur arbitraire déterminée. La différence avec le cas général est donc bien établie; présentons la sous une forme moins symbolique.

Si on élimine z et λ entre les équations (c), on obtient les $(n-2)$ équations du système adjoint

$$\left|\begin{aligned} \mathfrak{M}_1(u\,|\,T) &= 0 \\ \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on forme alors les équations

$$(\mathrm{E}_0)\qquad \left|\begin{aligned} \mathfrak{M}_1\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) &= 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) &= 0 \end{aligned}\right.$$

on voit par les équations (c) elles-mêmes, que la fonction $f(z|u) + \lambda\varphi(z|u) + \mu$, où z, λ, μ jouent le rôle de constantes, est une solution du système (E_0).

Or on sait qu'un système complet de $(n-2)$ équations différentielles homogènes *linéaires* simultanées admet une solution complète de la forme

$$x_0 + \delta x_1 + \lambda x_2 + \mu$$

où λ, μ, δ sont les constantes, et x_0, x_1, x_2 trois solutions particulières.[1] Cette solution est linéaire par rapport à toutes les constantes.

---

[1] On suppose le nombre des variables égal à $(n+1)$.

Dans le cas actuel, nous avons une solution

$$f(z|u) + \lambda\varphi(z|u) + \mu$$

qui est linéaire par rapport à deux des constantes seulement; de là le nom de semi-linéaire que Lie a donné à ce genre d'équations différentielles.

Ainsi, ce qui caractérise une forme $M(u|du)$ dont le groupe d'éléments comprend des systèmes de courbes, c'est que le système adjoint d'équations différentielles est un système *semi-linéaire*.

Je n'insisterai pas davantage sur ces considérations générales, et je passe à quelques applications.

Recherche de tous les cas où la forme fondamentale est quadratique.

15. Je démontrerai d'abord la proposition suivante: *si parmi les équations du système adjoint l'une d'elles est linéaire, le nombre des variables peut être réduit d'une unité.*

Soient en effet les équations

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Si l'équation $\mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0$ est linéaire, elle admet n solutions indépendantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$; on peut prendre pour variables les fonctions v et une $(n+1)^{\text{ème}}$, formant avec elles un système de variables indépendantes. Les équations du système adjoint deviendront alors

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(v \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-3}\left(v \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(v \,\Big|\, \frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial v_{n+1}} = 0. \end{array}\right.$$

Toutes les solutions communes au système seront donc nécessairement des fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et ne contiendront pas v_{n+1}. La solution complète

$$\varphi(x, y \mid v) - z$$

ne contiendra pas v_{n+1}, et la surface

$$z = \varphi(x, y \mid v)$$

dépendra seulement de n paramètres. Il en résulte que v_{n+1} doit se trouver naturellement éliminé des équations du système adjoint, résultat auquel on est encore conduit en écrivant les conditions d'intégrabilité.

Corollaire. *Si p des équations du système adjoint sont linéaires, on peut réduire de p le nombre des paramètres.*

16. Appliquons ceci à la recherche des formes $M(u \mid du)$ qui sont quadratiques.

Je remarque d'abord que si une forme quadratique, de $(n+1)$ variables, est réductible à $(n+1-p)$ carrés, il existe p relations linéaires homogènes entre les dérivées partielles de cette forme, en sorte que ces dérivées sont exprimables en fonction de $(n+1-p)$ d'entr'elles entre lesquelles il n'existe aucune espèce de relation.

Si on assujettit néanmoins les variables à annuler la forme, une relation quadratique unique existe entre ces $(n+1-p)$ dérivées indépendantes. Donc, nous voyons que dans le cas d'une forme quadratique, $(n-3)$ des équations du système adjoint seront linéaires, et la $(n-2)^{\text{ème}}$ sera quadratique. Il en résulte que le nombre des paramètres peut être abaissé de $(n+1)$ à $n+1-(n-3) = 4$. De là ce théorème:

Les éléments qui ont pour forme fondamentale une forme quadratique ne peuvent dépendre de plus de 4 paramètres.[1]

D'ailleurs, si l'on prend une forme quadratique quelconque dépendant de 4 variables

$$M(u \mid du) = M(u_1, u_2, u_3, u_4 \mid du_1, du_2, du_3, du_4),$$

---

[1] Généralement, le nombre des paramètres est inférieur ou égal au degré de la forme augmenté de deux.

et que l'on prenne la forme adjointe unique $\mathfrak{M}(u \mid T)$, l'équation quadratique en $\frac{\partial\theta}{\partial u}$

$$\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0$$

admettra une solution complète

$$\varphi(x, y \mid u) - z$$

qui donnera immédiatement un élément pour lequel $M(u \mid du)$ est la forme fondamentale.

Dans cet exemple on n'a pas à s'occuper des conditions d'intégrabilité. Voici un exemple encore où ces conditions sont vérifiées d'elles-mêmes.

Cas des formes à coefficients constants.

17. Pour engendrer les formes fondamentales à coefficients constants, il suffit de partir d'un système de $(n-2)$ équations différentielles simultanées quelconque à coefficients constants

$$(E) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité sont vérifiées d'elles-mêmes, et si l'on détermine les fonctions $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_{n+1}(x, y)$ des deux constantes x, y, de façon à avoir

$$\mathfrak{M}_1(\varphi) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2(\varphi) = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(\varphi) = 0,$$

la fonction

$$-z + \varphi_1(x, y)u_1 + \varphi_2(x, y)u_2 + \dots + \varphi_n(x, y)u_n + \varphi_{n+1}(x, y)u_{n+1}$$

sera une solution complète du système des équations (E).

Si l'on prend pour élément la surface

$$z = \varphi_1(x, y)u_1 + \varphi_2(x, y)u_2 + \dots + \varphi_{n+1}(x, y)u_{n+1},$$

la forme fondamentale correspondante aura ses coefficients constants. Réciproquement, toute forme fondamentale à coefficients constants est évidemment susceptible d'un tel mode de génération.

Sur une forme particulière des équations adjointes.

18. Les équations

$$\text{(A)} \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0 \end{array} \right.$$

peuvent n'être pas entièrement équivalentes aux équations de définition

$$\text{(B)} \qquad \frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}}.$$

Il se peut en effet que l'espace commun aux espaces

$$\mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2(u \mid T) = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0$$

se décompose en espaces partiels dont l'un d'eux seulement corresponde aux équations (B).

Supposons ici algébriques par rapport aux T les équations (A).

Je m'appuierai sur le théorème suivant:

Lorsque $(n + 1)$ quantités sont liées par $(n - 2)$ relations homogènes algébriques, on peut trouver $(n + 1)$ polynômes

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma), \; \Phi_2(\alpha, \beta, \gamma), \; \ldots, \; \Phi_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma)$$

de trois paramètres α, β, γ liés par une équation irréductible algébrique

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

ces polynômes étant tels que si l'on substitue $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}$ à la place des $(n + 1)$ quantités dans les $(n - 2)$ équations, celles-ci se trouvent identiquement satisfaites en vertu de $\Omega = 0$.

Si le système des solutions des $(n - 2)$ équations forme un espace indécomposable, le système des polynômes Φ et Ω sera unique; mais s'il

y a décomposition, à chaque espace partiel correspondra un système de fonctions Φ et Ω.

Sans aller bien loin, nous avons déjà rencontré une représentation de ce genre pour les équations (A); reportons-nous en effet à la fonction V; on voit que les fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial u_{n+1}},$$

mises à la place de $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ dans les équations (A), vérifient ces équations en vertu de l'équation

$$V(x, y, z \,|\, u) = 0.$$

On a donc une représentation immédiate des équations (A) lorsque l'on connaît un des éléments qui correspondent à la forme, car ces équations pourront s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{T_1}{\dfrac{\partial V}{\partial u_1}} = \dfrac{T_2}{\dfrac{\partial V}{\partial u_2}} = \dfrac{T_3}{\dfrac{\partial V}{\partial u_3}} = \ldots = \dfrac{T_{n+1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u_{n+1}}} \\ V = 0. \end{array} \right.$$

Mais dans le cas où l'on part de la forme elle-même, on aura plus généralement

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{T_1}{\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u)} = \dfrac{T_2}{\Phi_2(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u)} = \ldots = \dfrac{T_{n+1}}{\Phi_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u)}, \\ \Omega(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u) = 0, \end{array} \right.$$

où il est entendu que α, β, γ peuvent être déterminés en fonction de u et de deux constantes de sorte que l'expression

$$\Phi_1 du_1 + \Phi_2 du_2 + \ldots + \Phi_{n+1} du_{n+1}$$

admette un facteur intégrant.

Cette nouvelle forme des équations (A) est principalement utile pour rechercher les formes fondamentales d'un degré donné.

Paris le 9 Juillet 1887.

SUR UN CAS SPÉCIAL DE

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LAMÉ

PAR

E. A. STENBERG

À HELSINGFORS.

La méthode donnée par M. HERMITE dans son admirable mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (premier fascicule, Paris, Gauthier-Villars 1885, §§ 44, 45), pour intégrer l'équation différentielle de LAMÉ

$$y'' - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y = 0$$

n'est plus applicable, quand les équations trouvées au § 45, c'est-à-dire

$$H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu = 0,$$

$$2\nu H_{2\nu} + (2\nu - 2)h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu - 4)h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2h_{\nu-1} H_2 = 0$$

ou

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 = 0,$$

$$(2\nu - 1)H_{2\nu-1} + (2\nu - 3)h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu = 0$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, conduisent par l'élimination de λ à une équation

$$\Phi(k^2 \operatorname{sn}^2 \omega,\ k \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega) = 0,$$

où la fonction doublement périodique Φ ne devient nul que pour $\omega = iK'$.

La fonction $f(x)$ du même paragraphe n'a, en effet, alors aucun pôle et ne peut pas par conséquent servir d'élément simple.

Il en est ainsi, particulièrement, toujours, quand l'équation de LAMÉ est satisfaite par des fonctions doublement périodiques spéciales de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER.[1] C'est ce cas, laissé de côté par M. HERMITE, que je me propose d'étudier ici.

Soit y une fonction de cette espèce, ayant le seul pôle $x = iK'$, auquel correspond le développement suivant

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}} + \ldots.$$

La quantité λ, qui entre dans les multiplicateurs

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda i K'}$$

de cette fonction, est alors, comme l'a démontré M. MITTAG-LEFFLER dans son article cité ci-dessus, soumise à la condition

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1} + \frac{h_1}{\Gamma(n-2)}\lambda^{n-3} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\Gamma(4)}\lambda^3 + \frac{h_{\nu-1}}{\Gamma(2)}\lambda = 0$$

ou

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1} + \frac{h_1}{\Gamma(n-2)}\lambda^{n-3} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\Gamma(3)}\lambda^2 + h_{\nu-1} = 0$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$.

Pour reconnaître si l'équation de LAMÉ a une solution ainsi qualifiée nous déterminons d'abord les $\nu + 1$ coefficients

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_\nu, h_{\nu+1}$$

au moyen des formules de M. HERMITE au § 44:

$$h_1 = -\frac{h + n(n+1)s_0}{4n-2},$$

$$2(2n-3)h_2 = (2n-1)h_1^2 - \frac{n(n+1)}{2}s_1,$$

$$i(2n-2i+1)h_i = (2n-1)h_1 h_{i-1} - \frac{n(n+1)}{2}(s_1 h_{i-2} + s_2 h_{i-3} + \ldots + s_{i-1}),$$

[1] MITTAG-LEFFLER, *Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.* Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 26 Janvier 1880.

où les quantités s_0, s_1, s_2, ... sont les coefficients du développement

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1 \varepsilon^2 + s_2 \varepsilon^4 + \dots$$

c'est-à-dire

$$s_0 = \frac{1 + k^2}{3}$$

$$s_1 = \frac{1 - k^2 + k^4}{15}$$

$$s_2 = \frac{2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6}{189}$$

. . . .

J'emploie comme élément simple la fonction

$$f(x) = \chi(x) e^{\lambda(x - iK')},$$

où je pose

$$\chi(x) = \frac{\mathrm{Al}'(x)}{\mathrm{Al}(x)} + iJ.$$

On a

$$\chi(iK' + \varepsilon) = \frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1} = \frac{1}{\varepsilon} - A_0 \varepsilon - A_1 \varepsilon^3 - A_2 \varepsilon^5 - \dots,$$

où à l'aide de la relation

$$D_x^2 \log \mathrm{Al}(x)_1 = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$$

les coefficients seront donnés par la formule

$$A_i = \frac{s_i}{2i + 1}.$$

Nous pourrons ainsi écrire

$$f(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_1 \varepsilon + H_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

où nous aurons

$$H_0 = \lambda$$

$$H_1 = -A_0 + \frac{\lambda^2}{\Gamma(3)}$$

$$H_2 = -A_0\lambda + \frac{\lambda^3}{\Gamma(4)}$$

$$H_3 = -A_1 - A_0\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} + \frac{\lambda^4}{\Gamma(5)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

et en général

$$H_{2i} = -A_{i-1}\lambda - A_{i-2}\frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} - A_{i-3}\frac{\lambda^5}{\Gamma(6)} - \ldots - A_0\frac{\lambda^{2i-1}}{\Gamma(2i)} + \frac{\lambda^{2i+1}}{\Gamma(2i+2)},$$

$$H_{2i+1} = -A_i - A_{i-1}\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} - A_{i-2}\frac{\lambda^4}{\Gamma(5)} - \ldots - A_0\frac{\lambda^{2i}}{\Gamma(2i+1)} + \frac{\lambda^{2i+2}}{\Gamma(2i+3)}.$$

D'après cela, si nous considérons la fonction

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1}f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1\frac{D_x^{2\nu-3}f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}D_xf(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

ou

$$F(x) = \frac{D_x^{2\nu-2}f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{D_x^{2\nu-4}f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}f(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ ou $n = 2\nu - 1$, et posons $x = iK' + \varepsilon$, la partie principale de son développement sera égale à celle de y.

$F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce de M. Mittag-Leffler avec les multiplicateurs

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda iK'},$$

car

$$f(x + 2K) = e^{2\lambda K}f(x) - 2Je^{\lambda(x+2K)}$$

$$f(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}f(x) - 2iJ'e^{\lambda(x+2iK')}$$

d'où

$$f^{(r)}(x + 2K) = e^{2\lambda K}f^{(r)}(x) - 2\lambda^r Je^{\lambda(x+2K)}$$

$$f^{(r)}(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}f^{(r)}(x) - 2\lambda^r iJ'e^{\lambda(x+2iK')}$$

et par conséquent, en ayant égard à l'équation conditionnelle, à laquelle la quantité λ est soumise

$$F(x + 2K) = e^{2\lambda K}F(x)$$

$$F(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}F(x).$$

Cela posé, je dis que la fonction $F(x)$ sera une intégrale de l'équation de LAMÉ s'il est possible de déterminer les quantités C et λ de telle sorte que dans les développements des fonctions $F(x)$ et y, suivant les puissances croissantes de ε, non seulement, comme nous l'avons vu, les parties principales mais aussi les termes constants et les coefficients de ε^2 soient égaux, toutefois sans què l'équation conditionnelle cesse d'être satisfaite par λ.

En substituant $F(x)$ pour y dans le premier membre de l'équation de LAMÉ, nous obtiendrons en effet alors une fonction doublement périodique de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER

$$D_x^2F(x) - [n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 x + h]F(x),$$

dont les multiplicateurs seront

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda iK'}$$

et qui n'aura qu'un seul pôle $x = iK'$, auquel correspondra un développement de la forme

$$\frac{c_0}{\varepsilon} + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \ldots.$$

L'équation conditionnelle de cette fonction sera ainsi

$$c_0\lambda = 0,$$

d'où

$$c_0 = 0,$$

parce que nous ne nous occupons point des solutions doublement périodiques de première espèce, dont l'étude complète est donnée par M. HERMITE au § 52. La fonction en question, n'ayant ainsi aucun pôle, sera de la forme $Ce^{\lambda x}$ et par conséquent, comme étant égal à zéro pour $x = iK'$, identiquement nul.

Posons, dans le cas de $n = 2\nu$, le terme constant du développement de $F(x)$,

$$- H_{2\nu-1} - h_1 H_{2\nu-3} - h_2 H_{2\nu-5} - \ldots - h_{\nu-1} H_1 + C$$

égal à h_ν et le coefficient de ε^2

$$- \nu(2\nu + 1) H_{2\nu+1} - (\nu - 1)(2\nu - 1) h_1 H_{2\nu-1} - (\nu - 2)(2\nu - 3) h_2 H_{2\nu-3} - \ldots$$

$$\ldots - 2 . 5 h_{\nu-2} H_5 - 1 . 3 h_{\nu-1} H_3 + \frac{C}{2} \lambda^2$$

égal à $h_{\nu+1}$, et dans le cas de $n = 2\nu - 1$ le terme constant ainsi que le coefficient de ε^2, c'est-à-dire les expressions

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 + C,$$

$$\nu(2\nu - 1) H_{2\nu} + (\nu - 1)(2\nu - 3) h_1 H_{2\nu-2} + (\nu - 2)(2\nu - 5) h_2 H_{2\nu-4} + \ldots$$

$$\ldots + h_{\nu-1} H_2 + \frac{C}{2} \lambda^2$$

égaux à zéro. Par cela nous obtenons d'abord pour $n = 2\nu$

$$C = H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu$$

et pour $n = 2\nu - 1$

$$C = - [H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + \ldots + h_{\nu-2} H_2 + h_{\nu-1} H_0]$$

et ensuite, en ayant égard aux expressions des H, la relation

$$\text{(A)} \qquad \lambda^{n+2} + (n + 2)[n s_0 + (n - 1) h_1] \lambda^n$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n - 2i + 1)} (n + 2) \Big[(n - i) s_i + \sum_{j=1}^{j=i} (n - i - j) s_{i-j} h_j$$

$$+ (n - 2i - 1) h_{i+1} \Big] \lambda^{n-2i} = 0,$$

où $N = \nu$ dans le premier cas et $N = \nu - 1$ dans le second. Cette relation doit être satisfaite par une racine λ de l'équation conditionnelle, si l'équation de Lamé est intégrée par une fonction du genre considéré.

A chaque racine commune λ de ces équations correspond une autre $-\lambda$, et comme chaque valeur de λ nous donne une intégrale particulière, il n'existe qu'une seule quantité λ^2, qui en même temps satisfait aux deux équations, et à celle correspondent les deux fonctions $F(x)$ et $F(-x)$, qui entrent dans l'intégrale générale de l'équation de Lamé

$$C_1F(x) + C_2F(-x).$$

Pour que cette équation différentielle ait une intégrale doublement périodique du genre considéré, il est donc nécessaire et suffisant que les équations (A) et

$$\lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-2i)} h_i \lambda^{n-2i-1} = 0$$

soient satisfaites par une même valeur de λ^2.

En faisant les coefficients de ε dans les développements des fonctions $F(x)$ et y égaux nous obtenons une équation

$$\text{(B)} \qquad \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+2)} + \sum_{i=0}^{i=\nu-1} \frac{\lambda^{n-2i-1}}{\Gamma(n-2i)}\left(s_i + \sum_{j=1}^{j=i} h_j s_{i-j} + h_{i+1}\right) = 0,$$

qui est satisfaite par chaque racine λ^2 de l'équation conditionnelle. Par cette relation (B) nous pouvons simplifier l'équation (A) sans qu'elle cesse de jouer le rôle en question. Désignons par a et b les membres gauches des équations (A) et (B); la formule

$$b\lambda - \frac{\Gamma(n+3)}{n+1} a = 0$$

donnera en effet l'équation

$$\text{(A')} \qquad \frac{\lambda^{n+2}}{\Gamma(n+3)} + h_1 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1)}$$
$$-\sum_{i=1}^{i=N} \frac{\lambda^{n-2i}}{\Gamma(n-2i+1)}\left(is_i + \sum_{j=1}^{j=i-1} (i-j) h_j s_{i-j} - h_{i+1}\right) = 0,$$

où les coefficients des $\dfrac{\lambda^{n-2i}}{\Gamma(n-2i+1)}$, ne dépendant que par les quantités h de la valeur n, se laissent calculer plus facilement que ceux de l'équation (A).

Applications. Parce qu'il n'existe aucune fonction doublement périodique de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER, dont le pôle unique soit d'ordre inférieur au troisième, l'équation de LAMÉ ne peut être du genre spécial étudié ci-dessus que pour $n \geqq 3$.

I. Considérons en premier lieu le cas de $n = 3$. On a

$$h_1 = -\frac{h + 4(1 + k^2)}{10}$$

$$h_2 = \frac{5}{6}h_1^2 - s_1.$$

L'équation conditionnelle de λ est

$$\lambda^2 + 2h_1 = 0$$

et celle que nous avons désignée par (A')

$$\frac{\lambda^5}{\Gamma(6)} + h_1\frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} + (h_2 - s_1)\lambda = 0.$$

Si

$$h_1^2 = \frac{1}{4}(1 - k^2 + k^4)$$

le membre gauche de la dernière équation est divisible par $\lambda^2 + 2h_1$. Les seules équations de LAMÉ du genre considéré au cas de $n = 3$ sont ainsi

$$y'' - \left[12k^2 \operatorname{sn}^2 x - 4(1 + k^2) + 5\sqrt{1 - k^2 + k^4}\right]y = 0$$

et

$$y'' - \left[12k^2 \operatorname{sn}^2 x - 4(1 + k^2) - 5\sqrt{1 - k^2 + k^4}\right]y = 0,$$

où $\sqrt{1 - k^2 + k^4}$ désigne la racine positive.

Pour la première, la fonction $F(x)$, qui entre dans l'intégrale générale

$$C_1F(x) + C_2F(-x),$$

est

$$F(x) = \frac{D_x^2 f(x)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4}\, f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')},$$

où

$$\lambda = \sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$$

$$C = \frac{1}{6}\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}[2(1 + k^2) - \sqrt{1 - k^2 + k^4} + 3\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}],$$

et pour la seconde équation

$$F(x) = \frac{D_2^r f(x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4} f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')},$$

où

$$\lambda = i\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$$

$$C = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4} + \frac{i}{6}\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}[2(1 + k^2) + \sqrt{1 - k^2 + k^4}].$$

Dans ces formules le radical $\sqrt{1 - k^2 + k^4}$ a la valeur nommée et $\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$ désigne la racine quatrième réelle et positive.

II. Dans le cas de $n = 4$ on a

$$h_1 = -\frac{h}{14} + \frac{10}{21}(1 + k^2)$$

$$h_2 = \frac{7}{10}h_1^2 - s_1$$

$$h_3 = \frac{49}{90}h_1^3 - \frac{17h_1s_1 + 10s_2}{9}.$$

Les deux équations caractéristiques sont

$$\frac{\lambda^2}{\Gamma(4)} + h_1\lambda = 0$$

$$\frac{\lambda^6}{\Gamma(7)} + h_1\frac{\lambda^4}{\Gamma(5)} + (h_2 - s_1)\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} + h_3 - h_1s_1 - 2s_2 = 0,$$

elles ont une racine λ^2 commune si

$$h_1^3 - \frac{35}{4}h_1s_1 + \frac{35}{4}s_2 = 0.$$

Nous obtenons trois valeurs distinctes pour h et ainsi trois équations de Lamé du genre considéré, dont les intégrales auront la forme

$$F(x) = -\frac{D_x^3 f(x)}{6} - h_1 D_x f(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

où

$$\lambda = \pm\sqrt{-6h_1}$$

$$C = -\frac{4}{5}h_1^2 + 2h_1 s_0 - \frac{4}{3}s_1.$$

ACTA MATHEMATICA

INHALTSVERZEICHNISS DER BÄNDE | TABLE DES MATIÈRES DES TOMES

1—10

BEARBEITET VON | COMPOSÉE PAR

G. ENESTRÖM.

ÜBERSICHT. — SOMMAIRE.

ACTA MATHEMATICA.

1, **1882/1883** [(8) + **399** p. + pl. + portr.].	**6**, **1885** [(3) + **416** p.].
2, **1883** [(4) + **429** p. + **4** pl.].	**7**, **1885/1886** [(6) + VI + **392** p. + portr.].
3, **1883/1884** [(4) + **380** + (1) p.].	**8**, **1886** [(4) + **392** p.].
4, **1884** [(3) + **416** p.].	**9**, **1886/1887** [(4) + **400** p.].
5, **1884/1885** [(4) + **408** p. + **2** pl.].	**10**, **1887** [(4) + **397** p.].

Aux tomes **4—7** ont été jointes, comme Appendice, les années 1884 et 1885 de la Bibliotheca Mathematica* rédigée par G. ENESTRÖM [1884: (2) p. + 124 col.; 1885: (3) p. + 200 col.].

[Notices sur le journal:] *Roma,* Accad. d. Lincei, Transunti $\mathbf{7}_3$, 1883, 104. (F. CASORATI.) — *Torino,* Accad. d. sc., Atti **18**, 1883, 243—244. (E. D'OVIDIO.) — *Milano,* Istituto Lombardo, Rendiconti $\mathbf{16}_2$, 1883, 3—4. (F. BRIOSCHI). — *Venezia,* Istituto Veneto, Atti $\mathbf{1}_6$, 1883, 435—436. (E. BELTRAMI.) — *Paris,* Acad. d. sc., Comptes rendus **95**, 1882, 1339. (CH. HERMITE.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{7}_2$, 1883, 130. (J. T[ANNERY].) — *Leipzig,* Astronom. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **18**, 1883, 60. (H. BRUNS.) — *Berlin,* Akad. d. Wissensch., Sitzungsber. 1883, 933—934. (K. WEIERSTRASS.) — *Göttingen,* Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1884, 508—509. (E. SCHERING.) — *Kjöbenhavn,* Vidensk. Selsk., Oversigt 1882, (55)—(56). (H. G. ZEUTHEN.) — Tidsskrift for Mathematik $\mathbf{6}_4$, 1882, 187—192. (H. G. ZEUTHEN) — *Christiania,* Vidensk. Selsk., Oversigt 1883, 4—9. (C. A. BJERKNES.) — Finsk Tidsskrift (Helsingfors) **14**, 1883, 382—385. (HJ. MELLIN.) — Ny svensk Tidskrift (Lund) 1883, 80—83. (K. W[ICKSE]LL.) — Nordisk Revy (Upsala), Profnummer 1883, 13—14. (A. SÖDERBLOM.) — Nordisk Tidskrift (Stockholm) 1882, 613—618. (G. ENESTRÖM.) — [Analyse des tomes **1—3**:] Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884; Revue 136—171 (J. T[ANNERY]); $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 137—149 (G. K.). — [Tables des matières des tomes **1—7**, **9**:] Archiv. der Mathem. **69**, 1883, Litter. Ber. 30; **70**, 1884, Litter. Ber. 11, 46; $\mathbf{1}_2$, 1884, Litter. Ber. 25—26; $\mathbf{2}_2$, 1885, Litter. Ber. 13—14, 38—39; $\mathbf{3}_2$, 1885, Litter. Ber. 24; $\mathbf{4}_2$, 1886, Litter. Ber. 36; $\mathbf{5}_2$, 1887, Litter. Ber. 34. (H.)

---

* L'année 1886 de cette revue bibliographique a paru séparément, mais à prix de souscription réduit pour les abonnés aux Acta Mathematica.

Le cahier **1**:1 a paru en décembre 1882, le cahier **10**:4 le 30 novembre 1887. Les dix tomes publiés ont contenu en tout 162 mémoires ou notes dont 95 (embrassant 2382 pages) sont rédigés en français, 66 (embrassant 1561 pages) en allemand et 1 (embrassant 36 pages) en anglais.

La répartition des auteurs d'après leur nationalité donne pour résultat la table suivante:

	nombre d'auteurs	nombre de mémoires	nombre de pages	%
suédois	11	19	510	12,8
norvégiens	2	2	56	1,4
danois	4	5	137	3,4
finlandais	3	8	133	3,3
français	16	42½	1594	40,1
allemands	28	64½	1220	30,7
italiens	4	6	92	2,3
suisses	2	2	88	2,2
russes	3	4	45	1,1
néerlandais	1	5	38	1,0
américain	1	1	36	0,9
belge	1	2	28	0,7
autrichien	1	1	2	0,1
Total	**77**	**162**	**3979**	100,0

I. Alphabetisches Register. — Table alphabétique.

APPELL, PAUL EMILE.

Né à Strasbourg (département du Bas-Rhin) en France le 27 septembre 1855, répétiteur à l'école des hautes études 1876—1877, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris 1877—1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Dijon 1879—1881, maître de conférences à l'école normale de Paris 1881—1885, professeur de mécanique rationnelle à la faculté des sciences de Paris depuis 1885.

Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). **1**, 109—131, 132—144.

Deux mémoires. — Plusieurs des résultats contenus dans ces mémoires ont été exposés dans les notes *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique; Sur les fonctions doublement périodiques à points singuliers essentiels; Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique* insérées aux Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 700—703, 936—938; **95**, 1882, 624—626. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 333. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 138—142. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 880—881.

Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. **1**, 145—152.

Comparez la note: *Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 1238—1240). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 323—324. (D[YC]K.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 142—143. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 881. — L'auteur a étendu les résultats contenus dans ce mémoire dans deux articles: *Sur certains développements en séries de puissances* (Bullet. de la soc. mathém. de France **11**, 1883, 65—69) et *Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercles* (Mathem. Ann. **21**, 1883, 118—125).

Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. **2**, 71—80.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 357—358. (D[YC]K.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 155—156. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 883.

APPELL, PAUL EMILE.

BELTRAMI, EUGENIO.

Né à Cremona en Italie le 16 novembre 1835, professeur extraordinaire à l'université de Bologna en 1862, ensuite professeur ordinaire à Pisa en 1863, à Bologna en 1866 et à Roma en 1873, professeur de physique mathématique à l'université de Pavia depuis 1876.

BENDIXSON, IVAR.

Né à Stockholm le 1 août 1861, licencié ès sciences en 1881, chargé de conférences à l'université de Stockholm 1884—1885.

BENDIXSON, IVAR.

deux notes *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **101**, 1885, 1050—1053, 1129—1131. — Corrections à la suite de la table des matières du tome **9**.

BERGER, ALEXANDER FREDRIK.

Né à Nysund (Vermland) en Suède le 30 juin 1844, maitre de conférences à l'université d'Upsala depuis 1875.

Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres. **9**, 301—320.

BERTRAND, JOSEPH LOUIS FRANÇOIS.

Né à Paris le 11 mars 1822, ingénieur des mines en 1842, professeur titulaire de physique générale et mathématique au Collége de France en 1862, sécrétaire perpétuel de l'académie des sciences de Paris depuis 1874.

Sur les unités électriques. **8**, 387—392.

Comparez la note de l'auteur *Sur les unités électriques* (Bulletin d. sc. mathém. 7_2, 1883, 72—85).

BJERKNES, CARL ANTON.

Né à Christiania le 24 octobre 1825, sous-chef des mines à Kongsberg, plus tard professeur au lycée de la même ville 1848—1854, professeur de mathématiques à l'université de Christiania depuis 1863.

Recherches hydrodynamiques. PREMIER MÉMOIRE. **Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires.** **4**, 121—170.

Ce mémoire commence l'exposition systématique des recherches auxquelles se rapportent un très grand nombre de mémoires et de notes publiées précédemment par l'auteur dans différents recueils. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 823—827. (W[ANGERIN].)

BOHLIN, KARL PETRUS THEODOR.

Né à Stockholm le 30 octobre 1860, assistant à l'observatoire de Stockholm depuis 1884, maître de conférences d'astronomie à l'université d'Upsala en 1886.

Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. **10**, 109—130.

Ces recherches ont été publiées aussi, sous une forme un peu différente, dans le mémoire *Om betydelsen af lefvande kraftens princip för frågan om dynamiska systems stabilitet* inséré dans le Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar **13** afd. I, n° 1, 1887.

BOURGUET, JEAN PIERRE LOUIS.

Né à Virac (Tarn) en France le 1 novembre 1833, professeur de mathématiques à Paris.

CANTOR, GEORG FERDINAND LOUIS PHILIPPE.

Né à S:t Pétersbourg le 3 mars 1845, maître de conférences à l'université de Halle en 1869, professeur extraordinaire à la même université en 1872, professeur ordinaire depuis 1879.

CANTOR, GEORG FERDINAND LOUIS PHILIPPE.

Sur les ensembles infinis et linéaires de points. I—IV. **2**, 349—380.

Traduction de quatre mémoires: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Mathem. Ann. **15**, 1879, 1—8; **17**, 1880, 355—358; **20**, 1882, 113—122; **21**, 1883, 51—59).

Fondements d'une théorie générale des ensembles. **2**, 381—408.

Extrait, en partie remanié, d'un mémoire: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Mathem. Ann. **21**, 1883, 545—591). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 453—455. (SCH[LE]G[EL].) — Une analyse des résultats contenus dans ce mémoire et dans les précédents a été donnée par M. J. T[ANNERY] dans le Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 162—171.

Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à *N* dimensions. Première communication. **2**, 409—414.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 453—455. (SCH[LE]G[EL].)

De la puissance des ensembles parfaits de points. **4**, 381—392.

Plusieurs des résultats exposés dans ce mémoire se trouvent aussi dans la note *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, n° 6 (Mathem. Ann. **23**, 1884, 453—488.) — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 460. (ST[OLZ].)

Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem *n*-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Zweite Mittheilung. **7**, 105—124.

Aux mémoires précédents de M. CANTOR se rattachent des recherches de MM. BENDIXSON, MITTAG-LEFFLER, PHRAGMÉN et SCHEEFFER publiées dans les Acta Mathematica. Des analyses détaillées ont été données par M. KERRY dans l'article: *Über G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen* (Vierteljahrsschr. f. wissensch. Philosophie **9**, 1885, 191—232) et M. GUTBERLET dans la première partie du mémoire: *Das Problem des Unendlichen* (Zeitschr. f. Philosophie und philos. Kritik **88**, 1886, 179—195).

CASORATI, FELICE.

Né à Pavia en Italie le 17 décembre 1835, professeur à l'université de Pavia depuis 1857.

Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. **8**, 345—359.

Réimpression, corrigée par l'auteur, d'une brochure imprimée à Milano en 1885. — Les premières recherches sur ce sujet se trouvent dans les notes *Sur les fonctions à périodes multiples* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **57**, 1863, 1018—1020; **58**, 1864, 127—131, 204—207.)

DUBOIS-REYMOND, PAUL.

Über den Begriff der Länge einer Curve. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Curven. 6, 167—168.

Le mémoire de SCHEEFFER dont il s'agit, est inséré au tome 4, p. 49—82.

ELLIOT, VICTOR ZÉPHIRIN.

Né à Guise (Aisne) en France le 27 mars 1847, professeur à la faculté des sciences de Besançon depuis 1879.

Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques. 2, 233—260.

Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. 15 (1883), 281—282. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 159—160. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques 4 (1883), 884.

FALK, MATTHS.

Né à Eskilstuna en Suède le 19 septembre 1841, maître de conférences à l'université d'Upsala en 1869, professeur au lycée de Skara en 1876 et au lycée d'Upsala depuis 1877.

Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen. 7, 197—200.

FIEDLER, OTTO WILHELM.

Né à Chemnitz (Sachsen) en Allemagne le 3 avril 1832, professeur à l'école polytechnique de Prag en 1864, à l'école polytechnique de Zürich depuis 1867.

Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. 5, 331—408.

Avec 2 planches. — Quelques-uns des résultats exposés dans ce mémoire ont été publiés par l'auteur dans l'ouvrage *Cyclographie* (Leipzig 1882, 8°) p. 237 et suiv., et dans une note: *Zu zwei Steiner'schen Abhandlungen* insérée dans la Vierteljahrsschr. der naturf. Gesellsch. in Zürich 28, 1883, 409—418. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. 16 (1884), 521. (H[AUC]K.) — Quelques détails du mémoire ont été développés dans les *Geometrische Mittheilungen* VII, VIII (Vierteljahrsschr. der naturf. Gesellsch. in Zürich 29, 1884, 343—358.

FUCHS, LAZARUS.

Né à Moschin (Posen) en Allemagne le 5 mai 1833, maître de conférences à l'université de Berlin en 1865, professeur extraordinaire à la même université en 1866, professeur ordinaire à l'université de Greifswald en 1869, à l'université de Göttingen en 1874, à l'université de Heidelberg en 1875, professeur à l'université de Berlin depuis 1884.

Über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. 1, 321—362.

FUCHS, LAZARUS.

Les résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans une note avec le même titre insérée dans les Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1882, 703—710. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 242—243. (H[AMBURGER.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 150—151. (J. T[ANNERY].)

Sur un développement en fraction continue.
Voir HERMITE.

GOURSAT, EDOUARD.

Né à Lanzac (département du Lot) en France le 21 mai 1858, chargé de conférences à la Sorbonne en 1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Toulouse en 1881, maître de conférences à l'école normale de Paris depuis 1885.

Sur un théorème de M. Hermite. **1**, 189—192.

Le théorème en question se rapporte aux intégrales définies affectées de coupures; voir le mémoire de M. HERMITE: *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Journ. für Mathem. **91**, 1881, 54—78.) — Cf. la note *Sur quelques intégrales doubles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 1304—1307). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1884), 220. (H[OPPE].)

Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. **2**, 1—70.

Avec 4 planches. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 243—246. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 152—155. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 882—883.

Démonstration du théorème de Cauchy. **4**, 197—200.

Cette note a aussi été publiée dans le Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar **9**, 1885, n° 5. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 236. (ST[OLZ].)

Sur une classe d'intégrales doubles. **5**, 97—120.

Ce mémoire se rapporte à une question soulevée par M. HERMITE dans le mémoire *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (Journ. für Mathem. **91**, 1881, 77). — Les résultats ont été résumés dans la note *Sur quelques intégrales doubles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 1304—1307).

GYLDÉN, JOHAN AUGUST HUGO.

Né à Helsingfors en Finlande le 29 mai 1841, maître de conférences d'astronomie à l'université de Helsingfors en 1862, astronome adjoint à l'observatoire de Poulkowa en 1863, astronome titulaire au même observatoire en 1865, directeur de l'observatoire de Stockholm depuis 1871.

KÖNIGSBERGER, LEO.

même université en 1866, à l'université de Heidelberg en 1869, à l'école polytechnique de Dresden en 1875, à l'université de Wien en 1877, depuis 1884 professeur à l'université de Heidelberg.

Über die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten. **3**, 1—48.

Les resultats de ce mémoire ont été énoncés préalablement dans la note: *Über die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung zugehörigen selbständigen Transcendenten* (Nachrichten der Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1883, 219—226). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 242—243. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887; Revue 137—138. (G. K.) — Les résultats obtenus ont été utilisés par l'auteur dans le mémoire: *Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abelschen* (Journ. für Mathem. **100**, 1886, 121—136; **101**, 1887, 1—72).

KOWALEVSKI, SOPHIE.

Née CORVIN-KRUKOWSKI à Moskwa le $\frac{15}{3}$ décembre 1853, docteur ès sciences à Göttingen en 1874, professeur d'analyse supérieure à l'université de Stockholm depuis 1884.

Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3ten Ranges auf elliptische Integrale. **4**, 393—414.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 426—429. (H[ENO]CH.)

Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln. **6**, 249—304.

Les pages 254—279 de ce mémoire contiennent un mémoire de M. K. **Weierstrass**: »Eine Integrationsmethode für lineare partielle Differentialgleichungen».

Les résultats contenus dans le mémoire ont été signalés préalablement dans la note *Om ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **41**, 1884, n° *2*: 119—121) dont une traduction, avec le titre *Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé*, a été insérée dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **98**, 1884, 356—357. — [Analyse] Beiblätter zu den Annalen der Physik **8**, 1884, 373—374 (J. E.); **9**, 1885, 337. (HTZ.). — Revue des travaux scientifiques **5** (1884), 360.

KRAUSE, MARTIN.

Professeur à l'université de Rostock.

Sur la transformation des fonctions elliptiques. **3**, 93—96.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 392—393. (M[ÜLLER].)

KRAUSE, MARTIN.

Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. **3**, 153—180.

Correction à la fin du tome 3. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 435—436. (H[ENO]CH.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 143. (G. K.)

Sur le multiplicateur des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. **3**, 283—288.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 437—438. (H[ENO]CH.) — Comparez le traité de l'auteur: *Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Nebst Anwendungen* (Leipzig, Teubner 1886).

KRAZER, ADOLF.

Né à Zusmarshausen (Bayern) en Allemagne le 15 avril 1858, maître de conférences à l'université de Würzburg depuis 1883.

Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. **3**, 240—276.

En commun avec M. F. Prym. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 419—428. (H. St[AHL].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 145. (G. K.) — M. KRAZER a utilisé les résultats de ce mémoire dans l'article *Über Thetafunctionen deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind* (Mathem. Ann. **22**, 1883, 416—449).

KREY, HEINRICH.

Né à Husum en Schleswig le 1 avril 1846, particulier, actuellement demeurant à Leipzig.

Einige Anzahlen für Kegelflächen. **5**, 83—96.

Corrections à la suite de la table des matières du tome 5. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 605—606. (SCH[UBER]T.)

Über Systeme von Plancurven. **7**, 49—94.

LAGUERRE, EDMOND.

Né à Bar-le-Duc en France le 9 avril 1834, répétiteur à l'école polytechnique en 1864, professeur suppléant de physique mathématique au Collège de France en 1885, mort à Bar-le-Duc le 14 août 1886.

Sur quelques points de la théorie des équations numériques. **4**, 97—120.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 69—72. (T[OEPLITZ].)

LECORNU, LÉON FRANÇOIS ALFRED.

Né à Caen (Calvados) en France le 13 janvier 1854, ingénieur des mines en 1878, maître de conférences à la faculté des sciences de Caen depuis 1881.

LECORNU, LÉON FRANÇOIS ALFRED.

Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. **10**, 201—280.

Résumé d'un mémoire manuscrit auquel l'académie des sciences de Paris a décerné en 1886 une mention honorable.

LE PAIGE, CONSTANTIN.

Né à Liége en Belgique le 9 mars 1852, chargé de cours à l'université de Liége en 1876, professeur extraordinaire à la même université en 1882, professeur ordinaire d'analyse et de géométrie depuis 1885.

Sur les surfaces du troisième ordre. **3**, 181—200.

Corrections à la fin du tome **3**. — Les résultats contenus dans ce mémoire ont été énoncés dans deux notes *Sur les surfaces du troisième ordre* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **97**, 1883, 34—36, 158—159, et dans un memoire *Sur les surfaces du troisième ordre* (Verslagen en mededeelingen der akademie van wetenschappen [Amsterdam]; Afd. Natuurkunde **19**, 1884, 328—348). — [Analyse:] Jornal de sciencias mathematicas **5**, 1884, 74. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 583—584. (A[UGUST].)

Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre. **5**, 195—202.

Les résultats contenus dans ce travail ont été exposés sommairement dans la note *Sur les surfaces du troisième ordre* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **98**, 1884, 971—972), et développés dans la note *Sur les groupes de points en involution marqués sur une surface* (L. c. **99**, 1884, 534—538), ainsi que dans deux mémoires: *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires* (Bulletin de l'académie royale de Belgique $\mathbf{8}_3$, 1884, 238—255) et *Sur la forme quadrilinéaire et les surfaces du troisième ordre* (L. c. $\mathbf{8}_3$, 1884, 555—563). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 585. (A[UGUST].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 143—144. (G. K.)

LERCH, MATYÁŠ.

Né à Milínov (département du Susice) en Bohême le 20 février 1860, maître de conférences à l'école polytechnique tchèque de Prag depuis 1886.

Un théorème de la théorie des séries. **10**, 87—88.

LINDELÖF, LORENS LEONARD.

Né à Karvia en Finlande le 13 novembre 1827, maître de conférences d'astronomie à l'université de Helsingfors en 1855, professeur de mathématiques à la même université en 1857, directeur en chef de l'administration centrale des établissements d'instruction en Finlande en 1874.

LINDELÖF, LORENZ LEONARD.

Une question de rentes viagères. **3**, 97—101.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 175. (L[AZARU]S.) Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887; Revue 140. (G. K.) — Les résultats de ce mémoire ont été utilisés par l'auteur dans un mémoire: *Statistiska beräkningar angående finska civilstatens enke- och pupillkassa* (Acta soc. scient. Fennicæ **14**, 1885, 1—83).

LINDSTEDT, ANDERS.

Né à Sundborn (Dalarne) en Suède le 27 juin 1854, maître de conférences d'astronomie à l'université de Lund en 1877, astronome adjoint à l'université de Dorpat en 1879, professeur à la même université en 1883, professeur à l'école polytechnique de Stockholm depuis 1886.

Über ein Theorem des Herrn Tisserand aus der Störungstheorie. **9**, 381—384.

Le théorème dont il s'agit a été énoncé par M. TISSERAND dans la note *Sur un théorème de M. A. Lindstedt concernant le problème des trois corps* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **98**, 1884, 1207—1213) et dans les Annales de l'observatoire de Paris; Mémoires tome **18**, 1885.

LIPSCHITZ, RUDOLPH OTTO SIGISMUND.

Né à Königsberg en Allemagne le 14 mai 1832, maître de conférences à l'université de Bonn en 1857, professeur à l'université de Breslau en 1862, à l'université de Bonn depuis 1864.

Sur quelques points dans la théorie des nombres.

Voir HERMITE.

Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques.

Voir HERMITE.

Déduction arithmétique d'une relation due à Jacobi. **7**, 95—100.

Sur une formule de la théorie des fonctions ϑ. Corrections à la suite de la table matières du tome **7**.

Zur Theorie der krummen Oberflächen. **10**, 131—136.

Ce mémoire se rattache aux mémoires suivants de l'auteur: *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Sitzungsber. der preuss. Akad. d. Wissensch. 1882, 1077—1087; 1883, 169—188); *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements* (L. c. 1883, 541—560).

Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen. **10**, 137—144.

LORIA, GINO.

Né à Mantova en Italie le 19 mai 1862, maître de conférences à l'université de Torino en 1886, professeur de géométrie supérieure à l'université de Genova depuis 1887.

Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. **9**, 71—72.

Comparez le mémoire de M. HOLST, inséré dans le tome **8**, p. 155—160.

MALMSTEN, CARL JOHAN.

Né à Uddetorp (Vestergötland) en Suède le 9 avril 1814, maître de conférences à l'université d'Upsala en 1840, professeur de mathématiques à la même université en 1842, membre du ministère suédois en 1859, gouverneur de la province de Skaraborg en 1866. Mort à Upsala le 11 février 1886.

Zur Theorie der Leibrenten. **1**, 63—76.

Les pages 75—76 contiennent une »Nachschrift» de M. E. Schering. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 169. (L[AZARU]S.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884; Revue 136. (J. T[ANNERY].)

Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} . \Delta u'_x + \frac{B_1 . h^2}{1 . 2} . \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 . 2 . 3 . 4} . \Delta u^{IV}_x + \text{ etc.}$$

5, 1—46.

Réimpression, corrigée par l'auteur, d'un mémoire publié dans le Journ. für Mathem. **35**, 1847, 55—82. L'original suédois dont ce mémoire est une traduction a paru sous le titre: *Om den Eulerska formeln* $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 . 2} \Delta u''_x + (!) \frac{B_2 h^4}{1 . . . 4} \Delta u^{IV}_x$ — &c. dans les Vetenskapsakademiens handlingar 1844 (Stockholm, in-8°), 363—406. Les résultats ont été résumés dans plusieurs ouvrages, tout dernièrement encore dans l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable par* J. TANNERY (Paris, Hermann 1886, in-8°), 352—363. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 203—205. (H[OPPE].)

MARKOFF, ANDRÉ.

Né à Riazan en Russie le 2 juin 1856, professeur à l'université de S:t Pétersbourg depuis 1886.

Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebycheff. **9**, 57—70.

Comparez l'*Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite* publié dans les Annales de l'école normale [de Paris] $\mathbf{3}_3$, 1886, 81—88. — La question dont il s'agit a été proposée par M. TCHEBYCHEFF dans la note *Sur les valeurs limites des intégrales* (Journ. de mathém. $\mathbf{19}_2$, 1874, 157—160).

MATTHIESSEN, LUDWIG.

Né à Fissau (Fürstenthum Lübeck) en Allemagne le 22 septembre 1830, maître de conférences à l'université de Kiel en 1857, sous-recteur au lycée de Husum en 1864, professeur ordinaire de physique à l'université de Rostock depuis 1874.

Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegeneinander und gegen einen Hauptstrahl. **4**, 177—192.

Les résultats de ce mémoire ont été publiés aussi, sous une forme un peu différente, dans l'article: *Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien unendlich dünner copulirter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl* (Zeitschr. für Mathem. u. Phys. **29**, 1884; Supplement 86—100. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 934—935. (W[ANGERIN].) — Beiblätter zu den Annalen der Physik **8**, 1884, 580—581. (F.)

MELLIN, ROBERT HJALMAR.

Né à Törnävä (Österbotten) en Finlande le 19 juin 1854, maître de conférences à l'université de Helsingfors en 1884, professeur à l'école polytechnique de Helsingfors depuis 1884.

Über die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. **2**, 231—232.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 371—372. (M[ÜLLER].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{8}_2$, 1884; Revue 159. (J. T[ANNERY].)

Eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$ **3**, 102—104.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 233. (H[OPPE].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 140. (G. K.)

Über gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte. **3**, 322—324.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 395—396. (H[OPPE].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 146. (G. K.)

Zur Theorie der Gammafunction. **8**, 37—80.

Les resultats de ce mémoire ont été exposés préalablement dans deux mémoires avec le titre: *Om en ny klass af transcendenta funktioner hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen* (Acta societatis scientiarum Fennicæ **14**, 1885; **15**, 1886).

Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. **9**, 137—166.

Ce mémoire se rattache au travail précédent.

MINKOWSKI, HERMANN.

Né à Alexoten en Russie le 21 juin 1864, maître de conférences à l'université de Bonn depuis 1886.

Untersuchungen über quadratische Formen. I. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält. 7, 201—258.

Ce mémoire a été présenté par l'auteur, en 1885, à l'université de Königsberg i/Pr. pour obtenir le grade de doctorat. — Au mémoire se rattachent les recherches suivantes: *Über positive quadratische Formen* (Journ. für Mathem. **99**, 1886, 1—9); *Über den arithmetischen Begriff der Äquivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen* (L. c. **100**, 1887, 449—459); *Zur Theorie der positiven quadratischen Formen* (L. c. **101**, 1887, 196—202).

MITTAG-LEFFLER, MAGNUS GUSTAF.

Né à Stockholm le 16 mars 1846, maître de conférences à l'université d'Upsala en 1872, professeur à l'université de Helsingfors (Finlande) en 1877 et à l'université de Stockholm depuis 1881.

Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. 4, 1—79.

Plusieurs des résultats démontrés dans ce mémoire ont été exposés dans les notes: *En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlighetspunkter, hvilkas konstanter äro på förhand angifna* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **33**, 1876, n° *6*: 3—16); *Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter* (L. c. **34**, 1877, n° *1*: 17—32); *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt* (L. c. **34**, 1877, n° *1*: 33—43); *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett ändligt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter* (L. c. **34**, 1877, n° *2*: 31—41); *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget* (L. c. **39**, 1882, n° *2*: 11—45); *Om den analytiska framställningen af en entydig monogen funktion, hvilken uti omgifningen af hvarje punkt som är belägen innanföre en viss cirkelperiferi, endast har ett ändligt antal singulära ställen* (L. c. **39**, 1882, n° *4*: 21—25); *Extrait d'une lettre à M. Hermite* (Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{3}_2$, 1879, 269—278); *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 414—416, 511—514, 713—715, 781—783, 938—941, 1040—1042, 1105—1108, 1163—1166; **95**, 1882, 335—336). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 351—354. (H[URWITZ].)

Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. 4, 80—88.

Reproduction d'un mémoire publié dans les Mémoires de la société des

MITTAG-LEFFLER, MAGNUS GUSTAF.

sciences de Liége **11**$_4$, 1885. — Le texte suédois dont ce mémoire est une traduction a été inséré dans le Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **40**, 1883, n° *9*: 5—13, avec le titre: *Ett nytt bevis för Laurents teorem.* — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 350—351. (H[URWIT]Z.)

MOLK, JULES.

Né à Strasbourg (département du Bas-Rhin) en France le 8 décembre 1857, maître de conférences à la faculté des sciences de Rennes en 1884, chargé de cours à la faculté des sciences de Besançon depuis 1885.

Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. **6**, 1—166.

Ce mémoire a été présenté, en 1884, à la faculté des sciences de Paris pour obtenir le grade de doctorat. Il contient un développement du grand mémoire de M. KRONECKER: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Journ. für Mathem. **92**, 1882, 1—123).

NETTO, EUGEN.

Né à Halle a/S. en Allemagne le 30 juin 1846, professeur à l'université de Strasbourg en 1879, à l'université de Berlin depuis 1882.

Zur Theorie der Discriminanten. **1**, 371—399.

Ce mémoire se rattache à un travail publié avec le même titre dans le Journ. für Mathem. **90**, 1880, 164—186. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 52—54. (T[OEPLITZ].) — Bullet. d. sc. mathém. **8**$_2$, 1884; Revue 151—152. (J. T[ANNERY].)

Zur Theorie der Elimination. **7**, 101—104.

Über orthogonale Substitutionen. **9**, 295—300.

Comparez le théorème d'algèbre de M. STIELTJES inséré dans le tome **6**, p. 319—320.

NOETHER, MAX.

Né à Mannheim en Allemagne le 25 septembre 1844, maître de conférences à l'université de Heidelberg en 1870, professeur extraordinaire à la même université en 1874, professeur extraordinaire à l'université d'Erlangen depuis 1875.

Über die reductiblen algebraischen Curven. **8**, 161—192.

Un extrait de ce mémoire a été publié avec le titre: *Über reducible Curven* dans les Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen **17**, 1885, 13—18.

PHRAGMÉN, EDVARD.

Né à Örebro en Suède le 2 octobre 1863, licencié ès sciences en 1886, chargé de conférences à l'université de Stockholm 1886.

PICARD, CHARLES EMILE.

Né à Paris le 24 juillet 1856, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris en 1877, chargé de cours à la faculté des sciences de Toulouse en 1879, et à la faculté des sciences de Paris en 1881, professeur à la faculté des sciences de Paris depuis 1886.

PICARD, CHARLES EMILE.

384) et dans la troisième partie du mémoire *Sur les intégrales de différentielles totales de second espèce* (Journ. de mathém. $\mathbf{2}_4$, 1886, 329—372). — Comparez aussi le *Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées* (Annales de l'école normale [de Paris] $\mathbf{1}_3$, 1884, 9—54).

PINCHERLE, SALVATORE.

Né à Trieste en Autriche le 11 mars 1853, professeur au lycée de Pavia en 1875, professeur à l'université de Bologna depuis 1880.

Note sur une intégrale définie. **7**, 381—386.

Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies. **10**, 153—182.

Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire ont été exposés dans les notes suivantes: *Sur une formule dans la théorie des fonctions* (Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar **43**, 1886, 51—55); *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell* (Rendiconti dell' accademia dei Lincei [Roma] $\mathbf{2}_4$, 1886, *2*: 214—217); *Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari* (L. c. $\mathbf{3}_4$, 1887, *1*: 370—375); et dans le mémoire *Studi sopra alcune operazioni funzionali* (Memorie dell' accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna $\mathbf{7}_4$, 1886, 393—442).

POINCARÉ, HENRI.

Né à Nancy en France le 29 avril 1854, ingénieur des mines en 1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Caen en 1879, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris en 1881, chargé de cours en 1884, professeur de physique mathématique en 1886 à la même faculté.

Théorie des groupes fuchsiens. **1**, 1—62.

Corrections, tome **4**, p. 312. — Plusieurs des résultats contenus dans ce mémoire ont été énoncés dans une série de notes *Sur les fonctions fuchsiennes* insérées dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] (**92**, 1881, 333—335, 395—398, 859—861, 957, 1198—1200, 1274—1276; **93**, 1881, 301—303, 581—582), ainsi que dans la note *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* (Mathem. Ann. **19**, 1882, 553—564. L'auteur en avait exposé une partie déjà dans un mémoire manuscrit présenté en 1880 à l'académie des sciences de Paris pour le concours du grand prix des sciences mathématiques. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 338—344. (D[YCK.) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{7}_2$, 1883, 130—133. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 878—879.

POINCARÉ, HENRI.

Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. **1**, 193–294.

Corrections, tome **4**, p. 312. — Comparez les notes *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **94**, 1882, 163—166, 1038—1040, 1166—1167). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 342—347. (D[YC]K) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 145—148. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 879—880. — Ces recherches ont été continuées par l'auteur dans le mémoire: *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* (Journ. de mathém. 3_4, 1887, 405—464).

Sur les fonctions de deux variables. **2**, 97–113.

Les principaux résultats de ce mémoire ont été indiqués préalablement dans la note *Sur les fonctions de deux variables* insérée dans les Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 238—240. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 358. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 156. (J. T[ANNERY].) — Revue des travaux scientifiques **4** (1883), 883.

Mémoire sur les groupes kleinéens. **3**, 49–92.

Corrections, tome **4**, p. 312. — La plupart des résultats exposés dans ce mémoire ont été énoncés succinctement dans les notes *Sur les fonctions fuchsiennes* et *Sur les groupes kleinéens* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **92**, 1881, 1484—1487; **93**, 1881, 44—46). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 348—351. (D[YC]K.) — Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887; Revue 138—140. (G. K.)

Sur les groupes des équations linéaires. **4**, 201–311.

Comparez les notes *Sur les groupes des équations linéaires* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **96**, 1883, 691—694, 1302—1304). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 252—257. (D[YC]K.)

Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes. **5**, 209–278.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 252—257. (D[YC]K.)

Sur un théorème de M. Fuchs. **7**, 1–32.

Le théorème se rapporte à l'existence, en dehors des équations linéaires, d'autres classes d'équations différentielles dont toutes les intégrales particulières ont les mêmes points singuliers. Ce théorème a été signalé par M. FUCHS dans le mémoire *Über Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen* (Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1884, 699—710). — Les principaux résultats de ce mémoire ont été exposés dans la note *Sur un théorème de M. Fuchs* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **99**, 1884, 75—77).

POINCARÉ, HENRI.

Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. 7, 259–380.

Les principaux résultats de ce mémoire ont été exposés dans deux notes *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **100**, 1885, 1068—1070; **101**, 1885, 307—309). Comparez aussi une note avec le même titre (L. c. **100**, 1885, 346—348) et les deux notes *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (Bullet. astronom. **2**, 1885, 109—118, 405—413.) — [Analyse:] Beiblätter zu den Annalen der Physik **10**, 1886, 326—327. (F. A.) — Pour ce qui concerne le § 5 de ce mémoire, comparez aussi la note de M. MATTHIESSEN: *Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **102**, 1886, 857—858) et la réponse de M. POINCARÉ (L. c. **102**, 1886, 970—972).

Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. 8, 295–344.

Comparez les deux notes *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **101**, 1885, 939—941, 990—991).

Sur les résidus des intégrales doubles. 9, 321–380.

Les principaux résultats de ce mémoire ont été exposés dans la note *Sur les résidus des intégrales doubles* (Comptes rendus des séances de l'académie des sciences [de Paris] **102**, 1886, 41—44).

Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Réponse à M. Thomé. 10, 310–312.

Cette réponse se rapporte à la *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* publiée par M. L. W. THOMÉ dans le Journ. für Mathem. **101**, 1887, 203—208.

PRYM, FRIEDRICH EMIL.

Né à Duren (Rheinprovinz) en Allemagne le 28 septembre 1841, professeur à l'école polytechnique de Zürich en 1865, professeur à l'université de Würzburg depuis 1869.

Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. 3, 201–215.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 419—428. (H. ST[AHL].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 144. (G. K.)

Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. 3, 216–239.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 419—428. (H. ST[AHL].) — Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{11}_2$, 1887; Revue 144—145. (G. K.)

Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel.

Voir KRAZER.

REYE, THEODOR.

Né à Cuxhaven en Allemagne le 20 juin 1838, maître de conférences à l'école polytechnique de Zürich en 1863, professeur à la même école en 1867, professeur à l'école polytechnique d'Aachen en 1870, depuis 1872 professeur à l'université de Strasbourg.

RUNGE, CARL.

Né à Bremen le 30 août 1856, maître de conférences à l'université de Berlin en 1883, professeur à l'université de Hannover depuis 1886.

SCHEEFFER, KARL LUDWIG.

Né à Königsberg i/Pr. le 1 juin 1859, maître de conférences à l'université de München en 1884, mort à München le 11 juin 1885.

SCHERING, ERNST CHRISTIAN JULIUS.

Né à Sandbergen an der Elbe (près Lüneburg) en Allemagne le 13 juillet 1833, maître de conférences à l'université de Göttingen en 1859, professeur extraordinaire à la même uni-

SCHERING, ERNST CHRISTIAN JULIUS.

versité en 1860, professeur ordinaire et en même temps un des directeurs de l'observatoire astronomique depuis 1868.

Zur Theorie der quadratischen Reste. **1**, 153–170.

[Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 141. (S[IMO]N.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 143–144. (J. T[ANNERY].)

[Zur Theorie der Leibrenten.]

Voir MALMSTEN.

SCHLÄFLI, LUDWIG.

Né à Grasswyl (Canton Bern) en Suisse le 15 janvier 1814, maître de conférences à l'université de Bern en 1847, professeur à la même université depuis 1853.

Über $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ **und verwandte Integrale.** **7**, 187–196.

SCHROETER, HEINRICH EDUARD.

Né à Königsberg i/Pr. le 8 janvier 1829, maître de conférences à l'université de Breslau en 1855, depuis 1861 professeur ordinaire à la même université.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen. **5**, 205–208.

1. Démonstration d'une formule due à M. CAYLEY (comparez la note de M. HERMITE: *Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques*, dans le tome **1**, 1883, p. 368—370). 2. Formes irrationnelles des équations modulaires pour les transformations du 5e, 11e, 23e degré. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 409—410. (M[ÜLLER].)

SCHUBERT, HERMANN CÄSAR HANNIBAL.

Né à Potsdam en Allemagne le 22 mai 1848, depuis 1876 professeur de mathématiques à la »Gelehrtenschule« de Hamburg.

Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension.
8, 97–118.

SCHWERING, KARL.

Né à Osterwick (Westphalen) en Allemagne le 28 septembre 1846, maître de conférences à l'université de Münster en 1872, professeur de mathématiques au lycée de Brilon en 1875, ensuite au lycée de Coesfeld depuis 1878.

Über gewisse trinomische komplexe Zahlen. **10**, 57–86.

Correction à la suite de la table des matières du tome **10**.

SONINE, NIKOLAJ.

Né à Toula en Russie le 22 février 1849, maître de conférences à l'université de Varszawa en 1872, professeur extraordinaire à la même université en 1877, professeur ordinaire depuis 1879.

Sur la généralisation d'une formule d'Abel. **4**, 171—176.

La formule dont il s'agit se rapporte au calcul inverse des intégrales définies. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 354—356. (H[URWIT]Z.) — Réimprimé en russe avec quelques additions dans les Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей (Одесса), 1885 [Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle Russie à Odessa].

SPARRE, MAGNUS LOUIS MARIE DE.

Né à Mannenbach (canton de Thurgau) en Suisse le 12 mai 1849, sous-lieutenant d'artillerie en 1870, lieutenant en 1872, capitaine en 1875, démissionnaire en 1876, professeur de mathématiques à la faculté catholique des sciences de Lyon depuis 1882.

Sur l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[2\nu\frac{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}+2\nu_1\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}-2\nu_2\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$=\left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)+\frac{\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)\right.$$
$$\left.+\frac{k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)+k^2\operatorname{sn}^2x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)+h\right]y,$$

équation où ν, ν_1, ν_2, désignent des nombres quelconques, n, n_1, n_2, n_3 des nombres entiers positifs ou négatifs, et h une constante arbitraire. **3**, 105—140, 289—321.

Deux mémoires. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 277—279. (H[AMBURGE]R.) — Bullet. d. sc. mathém. **11**$_2$, 1887; Revue 140—142. (G. K.)

STAUDE, OTTO.

Né à Limbach (Sachsen) en Allemagne le 27 mars 1857, maître de conférences à l'université de Breslau en 1883, professeur à l'université de Dorpat depuis 1886.

Über hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung. **8**, 81—92.

Ces recherches ont été poursuivies dans les memoires suivants: *Über Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik* (Berichte der Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1886; Mathem. Cl. 199—206); *Über periodische und bedingt periodische Bewegungen* (Sitzungsber. d. Naturforscher-Gesellschaft bei der Univ. Dorpat 1886); *Über eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier reeller Veränderlicher* (Mathem. Ann. **29**, 1887, 467—485); *Über bedingt periodische Bewegungen* (Sitzungsber. der Naturf.-Gesellsch. bei der Univ. Dorpat 1887), ainsi que dans le mémoire signalé ci-après.

WEIERSTRASS, KARL.

Né à Osterfelde (Regierungsbezirk Münster) en Allemagne le 31 octobre 1816, professeur de mathématiques à Deutsch-Crone en 1842 et à Braunsberg en 1848, professeur extraordinaire à l'université de Berlin et à l'école des arts et des métiers (Gewerbe-Institut) en 1856, professeur ordinaire à la même université depuis 1864.

Sur la théorie des fonctions elliptiques. Traduit de l'allemand par A. Pautonnier. **6**, 169—228.

Le texte allemand de ce mémoire a été publié avec le titre: *Zur Theorie der elliptischen Functionen* dans les Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften 1883, 95—105, 163—173, 621—647.

[Eine Integrationsmethode für lineare partielle Differentialgleichungen].
Voir KOWALEVSKI.

WEINGARTEN, JULIUS.

Né à Berlin le 25 mars 1836, professeur à l'académie royale des architectes (Bauakademie) de Berlin depuis 1864.

Zur Theorie des Flächenpotentials. **10**, 303—309.

ZELLER, CHRISTIAN JULIUS JOHANNES.

Né à Mühlhausen près Stuttgart en Allemagne le 24 juin 1822, professeur de mathématiques au séminaire de Schoenthal 1848—1854, curé à Schöckingen en 1854, depuis 1874 recteur au séminaire de Markgröningen (Würtemberg).

Zu Eulers Recursionsformel für die Divisorensummen. **4**, 415—416.

Comparez la note de M. STERN insérée dans le tome **6**, p. 327—328. — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 147—148. (S[IMO]N.)

Kalender-Formeln. **9**, 131—136.

Ces formules ont été signalées aussi dans la note: *Problema duplex calendarii fundamentale* (Bullet. de la soc. mathém. de France **7**, 1883, 59—61) et dans les Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen (Tübingen) Heft 2, 1885, p. 54.

ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG.

Né à Grimstrup (Jylland) en Danemarc le 15 février 1839, maître de conférences à l'université de Kjöbenhavn en 1871, professeur extraordinaire à la même université en 1883, professeur ordinaire depuis 1886.

Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative. **1**, 171—188.

L'auteur présente une formule, qu'il avait indiquée précédemment dans la note *Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes* (Mathem. Ann. **3**, 1870, 150—156), sous une forme due à M. HALPHEN (voir la note *Sur les correspondances entre les points de deux courbes,*

ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG.

Bulletin de la soc. mathém. de France **5**, 1877, 7—18). — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), 566—568. (SCH[UBER]T.) — Bullet. d. sc. mathém. 8_2, 1884; Revue 144—145 (J. T[ANNERY].) — A ce mémoire se rattache une note *Sur un problème de Steiner* publiée dans le Bullet. d. sc. mathém. 11_2, 1887, 82—86.

Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. **5**, 203—204.

Cette note fait suite à l'article précédent de M. LE PAIGE: *Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre.* — [Analyse:] Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. **16** (1884), 592. (R[EINHAR]DT.)

N. H. ABEL.

Portrait (héliotypie); au commencement du tome **1**.

WEIERSTRASS.

Portrait (héliotypie); au commencement du tome **7**.

[Avant-propos de la rédaction.]

Au commencement du tome **1** (2 pages). — En allemand et en français.

[Annonce de la mort de Hj. Holmgren et C. J. Malmsten.]

Au commencement du cahier **7** : 4 (2 pages).

[Communication sur un prix de mathématiques fondé par le roi Oscar II.] **7**, I—VI.

En allemand et en français. — Cette communication a aussi été publiée séparément en suédois, danois, français, allemand et anglais. — [Reproductions ou traductions:] *Paris,* Acad. d. sc., Comptes rendus **101**, 1885, 531—533. — Revue scientifique **36**, 1885, 318—319. — Giorn. di matem. **23**, 1885, 244—246. — Deutsche Litteraturz. **6**, 1885, 1254—1255. — *Leipzig,* Astronom. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **20**, 1885, 210—213. — Quarterly journ. of mathem. **21**, 1886, 209—212. — *Washington,* Smithsonian Institution, Annual report 1885, n° 1, 331—333. — Cronica cientifica **9**, 1886, 34—36 (en espagnol). — Физико-математическія науки **1**, 1885, B: 193—196 (en russe).

Preisaufgabe der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1889. **8**, 264.

II. Systematisches Register. — Table méthodique.

1. ALGEBRA UND ZAHLENTHEORIE. — ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES.

2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG. — THÉORIE DES PROBABILITÉS.

3. ALLGEMEINE FUNKTIONENTHEORIE. — THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS.

4. THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN. ALLGEMEINES. — THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES. GÉNÉRALITÉS.

5. THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN. BESONDERE FUNKTIONEN. — THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES. FONCTIONS SPÉCIALES.

6. THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN. — THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

7. THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. — THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

8. GEOMETRIE. — GÉOMÉTRIE.

9. MECHANIK UND MATHEMATISCHE PHYSIK. — MÉCANIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

III. Namenregister. — Table des noms d'auteurs.





